الرياضيات الصف العاشر

ملخص الوحدة السادسة

الهندسة التحليلية والفضائية

إذا ما طمحت إلى غايـــــة لبست المنى وخلعتُ الحـذر

ومن لا يـحب صعود الجبال يعش أبد الدهـــــر بين الحفـر

إعداد : المعلمة سلسبيل الخطيب

الفصل الأول : المستقيمات

أولا : الـمـسـتـقـيـمـات الـمـتـوازيـة والـمـتـعـامـدة

➤➤ مـعــلــومــات هــامــة :

- ميل المستقيم المار بنقطتين هو $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$.

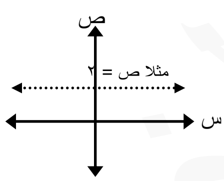
□ ميل المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (٤ ، ٧) هو : $\frac{٧ - ٣}{٤ - ٢} = ٢$

- ميل المستقيم الذي معادلته : (أ س + ب ص + جـ = صفر) ، هو $\frac{-أ}{ب}$.

□ ميل المستقم ٥س - ص + ٤ = ٠ هو : $\frac{-٥}{-١} = ٥$

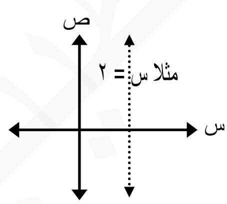
- ميل المستقيم الذي معادلته : (ص = أ س + ب) هو (أ) أي معامل س .

□ ميل المستقم ، ص = ٥س + ٤ هو = ٥ .



- **ميل المستقيم الأفقي = صفر** .

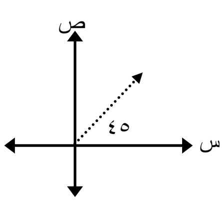
حيثُ أن المستقيم الأفقي هو اقتران ثابت الذي معادلتــه (ص = ب) ،، تذكر الاقتران الثابت هو حالة خاصة من الاقتران الخطي أس + ب ولكن أ = ٠



- **ميل المستقيم الرأسي = غير معروف** .

لو تأخذ أي نقطتين مثلا (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٥) لإيجاد الميل

الميل = $\frac{٥ - ٣}{٢ - ٢}$ = $\frac{عدد}{صفر}$ كمية غير مُعرفة.

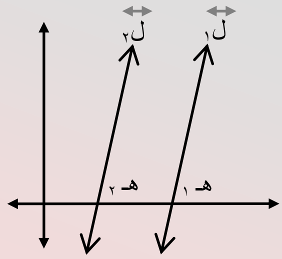


م = ظا ٤٥ = ١

- **ميل المستقيم = ظل زاوية ميله** .. أي أن (م = ظا هـ)

✪ التــوازي ✪

يكون $ل_{١}$ يوازي $ل_{٢}$ ($\overleftrightarrow{ل_{١}} // \overleftrightarrow{ل_{٢}}$) اذا كان ميل $ل_{١}$ = ميل $ل_{٢}$ أي أن : ($م_{١} = م_{٢}$)



والعكس صحيح ،

وحيث أن ($م$ = ظا هـ) ، فإنّ للمستقيمين المتوازيين زاوية الميل نفسها ،، انــظر الشكل المستقيمان $ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ متوازيان ، إذن :

- ميل $ل_{١}$ = ميل $ل_{٢}$
- $\measuredangle$ ميل $ل_{١}$ = $\measuredangle$ ميل $ل_{٢}$ ، أي : $هـ_{١} = هـ_{٢}$

مثـال

إذا كان أ (١ ، ٣) ، ب (٢ ، ٦) ، جـ (- ٣ ، - ٢) ، د (- ٢ ، ١) بيّن أنّ أ ب // جـ د

الحل :

- جد ميل أ ب : $م_{١} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٦ - ٣}{٢ - ١} = ٣$
- جد ميل جـ د : $م_{٢} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{١ - -٢}{-٢ - -٣} = \frac{٣}{١} = ٣$

بما أنّ $م_{١} = م_{٢}$ ،، ∴ أ ب // جـ د .

مثـال

$ل_{١}$ ، $ل_{٢}$ مستقيمان ، $ل_{١}$ // $ل_{٢}$ وكان $ل_{١}$ يمر بالنقطتين (٢ ، ٤) ، (-١ ، س) وميل المستقيم $ل_{٢}$ = ٣ ، فما قيمة س .

الحل :

- بما أنّ المستقيمان متوازيان فإنّ : $م_{١} = م_{٢}$.==> $م_{١} = ٣$
- $م_{١} = \frac{س - ٤}{-١ - ٢} = \frac{س - ٤}{-٣} = ٣$ ==> س - ٤ = -٩ ==> س = -٥

كل أحلامنا يُمكن أن تتحقق ،، إن كانت لدينا الشجاعة لمتابعتها

✪ التعامد ✪

يكون ل$_{١}$ يعامد ل$_{٢}$ (ل$_{١}$ $\perp$ ل$_{٢}$) وليس أحداهما رأسيا إذا كان ميل ل$_{١}$ × ميل ل$_{٢}$ = -١

أي أن : م$_{١}$ × م$_{٢}$ = - ١ ، والعكس صحيح

مثال

إذا كان المستقيم أ ب يمر بالنقطتين (١ ، ٤) ، (- ٣ ، ٢) والمستقيم جـ د يمر بالنقطتين (١ ، ١) ، (٤ ، -٥) ، بين أنّ أ ب $\perp$ جـ د .

الحل :

- جد ميل المستقيم أ ب ، وميل المستقيم جـ د
- جد ميل أ ب : $م_{١} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{٢ - ٤}{- ٣ - ١} = \frac{١}{٢}$
- جد ميل جـ د : $م_{٢} = \frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}} = \frac{- ٥ - ١}{٤ - ١} = - ٢$
- الآن $م_{١} \times م_{٢} = \frac{١}{٢} \times - ٢ = - ١$ ،، $\therefore$ أ ب $\perp$ جـ د

مثال

ل$_{١}$ ، ل$_{٢}$ مستقيمان متعامدان ، ومعادلة المستقيم ل$_{١}$ هي : ٢س = ٥ – ٤ص ، فإذا كان المستقيم ل$_{٢}$ يمر بالنقطتين (س ، ٣) ، (٤ ، ٢) ، فما قيمة س ؟

الحل :

- ميل المستقيم الذي معادلته : أ س + ب ص + جـ = صفر هو $\frac{- أ}{ب}$
- ميل المستقيم الذي معادلته : ص = م س + جـ هو (م)

وعليه اكتب معادلة ل$_{١}$: ٢س = ٥ – ٤ص على إحدى الصورتين السابقتين بإعادة ترتيب المعادلة ل$_{١}$ ينتج : ٢س + ٤ص – ٥ = ٠ ==> $م_{١} = \frac{-٢}{٤} = \frac{-١}{٢}$

- بما أن المستقيمان متعامدان إذن $م_{١} \times م_{٢} = -١$ ومنه $\frac{-١}{٢} \times م_{٢} = -١$ ==> $م_{٢} = ٢$
- $م_{٢} = \frac{٣ - ٢}{س - ٤} = \frac{١}{س - ٤} = ٢$ وبالضرب التبادلي ينتج أن : ٢س – ٨ = ١

==> ٢س = ٩ ==> س = ٤,٥ ،، وهو المطلوب .

>> أمثلة منوعة

مثال

اذا كانت أ (٣ ، ٢) ، ب (٥ ، ص) ، جـ (٢ ، ١) ، د (٣ ، -٢) جد قيمة ص إذا كان :

أولا : أ ب // جـ د

ثانيا : أ ب ⊥ جـ د .

الحل :

• جد م أب ، م جـد

$$م_{أب} = \frac{ص - ٢}{٥ - ٣} = \frac{ص - ٢}{٢} \quad ، \quad م_{جـد} = \frac{-٢ - ١}{٣ - ٢} = -٣$$

• **أولا** : أ ب // جـ د ،، ∴ $م_{أب} = م_{جـد}$ ، أي أنّ :

$$\frac{ص - ٢}{٢} = -٣ \implies ص - ٢ = -٦ \implies ص = -٤$$

• **ثانيا** : أ ب ⊥ جـ د ==> $م_{أب} \times م_{جـد} = -١$ ، أي أنّ :

$$\frac{ص - ٢}{٢} \times -٣ = -١ \implies \frac{-٣ص + ٦}{٢} = -١ \implies ص = \frac{٨}{٣}$$

مثال

جد زاوية ميل المستقيم $ل_١$ الذي يعامد المستقيم $ل_٢$ المار بالنقطتين (٠ ، ٤) (٢ ، ٢)

الحل :

• جد ميل $ل_٢ = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٢ - ٤}{٢ - ٠} = -١$

• وبما أنّ المستقيمين متعامدين ،، إذن $م_١ \times م_٢ = -١$

• $م_١ \times -١ = -١ \implies م_١ = ١$ ∴ ظل زاوية ميل المستقيم $ل_١ = ١ \implies$ ∡ الميل = ٤٥°

مثال

باستعمال فكرة الميل ، بيّن أنّ النقط أ (٤ ، ٠) ، ب (٢ ، ٢) ، جـ (١ ، ١) هي رؤوس مثلث قائم الزاوية

الحل :

• $م_{أب} = \frac{٢ - ٠}{٢ - ٤} = -١$ • $م_{بجـ} = \frac{١ - ٢}{١ - ٢} = ١$

• بما أنّ : $م_{أب} \times م_{جـد} = -١ \times ١ = -١$ ∴ أ ب ⊥ ب جـ ، ∴ المثلث قائم الزاوية في ب

مثـال

عين المستقيمات المتوازية والمستقيمات المتعامدة فيما يأتي :

المستقيم $ل_١$: ص = ٣ س +١ ، المستقيم $ل_٢$: ٩ص + ٣س = ٤

المستقيم $ل_٣$: ٢ص ـ ٦س = ٦ ، المستقيم $ل_٤$: س + ٣ص ـ ٩ = صفر

الحـل :

ميل $ل_١$: لاحظ المعادلة على الصورة ص = أ س + ب حيث ص موضوع القانون

إذن : الميل = معامل س ==> ميل $ل_١$ = ٣

ميل $ل_٢$: اكتب المعادلة على صورة أس + ب ص + جـ = ٠ ينتج أن :

$ل_٢$: ٣س + ٩ص – ٤ = ٠ ،، إذن ميل $ل_٢$ = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-١}{٣}$.

ميل $ل_٣$: اكتب المعادلة على صورة أس + ب ص + جـ = ٠ ينتج أن :

$ل_٣$: ـ٦س + ٢ص – ٦ = ٠ ،، إذن ميل $ل_٣$ = $\frac{-أ}{ب}$ = ٣

ميل $ل_٤$: لاحظ معادلة $ل_٤$ على الصورة أ س + ب ص + جـ = ٠

ميل $ل_٤$ = $\frac{-أ}{ب}$ = $\frac{-١}{٣}$.

$م_١$ = ٣ ، $م_٢$ = $\frac{-١}{٣}$ ، $م_٣$ = ٣ ، $م_٤$ = $\frac{-١}{٣}$

إذن ،،

$ل_١$ // $ل_٣$ لأنّ $م_١$ = $م_٣$ ، $ل_٢$ // $ل_٤$ لأنّ $م_٢$ = $م_٤$

$ل_١ \perp ل_٢$ لأنّ $م_١ \times م_٢$ = ـ ١ ، $ل_٣ \perp ل_٢$ لأنّ $م_٣ \times م_٢$ = ـ ١

$ل_١ \perp ل_٤$ لأنّ $م_١ \times م_٤$ = ـ ١ ، $ل_٣ \perp ل_٤$ لأنّ $م_٣ \times م_٤$ = ـ ١

دَبَبْتَ لِلْمَجْدِ وَالسَّاعُونَ قَدْ بَلَغُوا
جَهْدَ النُّفُوسِ وَأَلْقَوْا دُونَــه الأُزُرَا

فَكَابَدُوا الْمَجْدَ حَتَّى مَلَّ أَكْثَرُهُم
وَعَانَقَ الْمَجْدَ مَنْ أَوْفَى وَمَنْ صَبَرَا

لا تَحْسَبَنِ الْمَجْدَ تَمْرًا أَنْتَ آكِلُهُ
لَنْ تَبْلُغَ الْمَجْدَ حَتَّى تَلْعَقَ الصَّبِرَا

ثانيا : البُعد بين نقطة وخط مستقيم

مـعـلـومـات هــامــة :

- المسافة بين نقطتين أ (س$_1$ ، ص$_1$) ، ب (س$_2$ ، ص$_2$) تمثل بالقطعة المستقيمة أ ب

أ ب = $\sqrt{(س_2 - س_1)^2 + (ص_2 - ص_1)^2}$

- إحداثيات مُنتصف أ ب = ($\frac{س_1 + س_2}{2}$ ، $\frac{ص_1 + ص_2}{2}$) .
- الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي : **أ س + ب ص + جـ = صفرا**، حيثُ أ ، ب $\neq$ صفرا في آن معا
- معادلة الخط المستقيم : ص - ص$_1$ = م (س - س$_1$) حيث م ميل الخط المستقيم .

لإيجاد بُعد نقطة معلومة مثل (س$_1$، ص$_1$) عن مستقيم معلوم معادلته :أ س + ب ص + جـ = ٠

فإن هذا البعد هو أقصر مسافة بين النقطة والمستقيم ، ويكون هذا البعد هو العمود النازل من تلك النقطة على هذا المستقيم .

$$\text{بُعد نقطة عن مستقيم} = \left| \frac{أ\,س_1 + ب\,ص_1 + جـ}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \right|$$

حيث : أ معامل س ، ب معامل ص ، جـ الحد المطلق .

مثـال

جد بعد النقطة (٣ ، ٤) عن المستقيم الذي معادلته : ٢س = ٥ - ص

الحل :

- بدايةً اجعل معادلة المستقيم بالصورة العامة : أ س + ب ص + جـ = صفر ، إذن :

٢س = ٥ - ص ==> ٢س + ص - ٥ = ٠ (بنقل (٥ – ص) إلى الطرف الأيمن)

- ثانياً : حدد أ = ٢ ، ب = ١ ، جـ = - ٥ والنقطة : س$_1$ = ٣ ، ص$_1$ = ٤
- ثالثاً اكتب القانون وعوض القيم التي حددتها فيه ، إذن :

$$ف = \left| \frac{أ\,س_1 + ب\,ص_1 + جـ}{\sqrt{أ^2 + ب^2}} \right| = \left| \frac{2 \times 3 + 1 \times 4 + (-5)}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \right| = \left| \frac{6 + 4 - 5}{\sqrt{4 + 1}} \right|$$

==> ف = $\frac{5}{\sqrt{5}}$ وحدة .

☝ : قد يُعطى المستقيم والنقطة ويُطلب منك إيجاد بُعد النقطة عن المستقيم ، كما في المثال السابق ، وقد يُعطى نقطتان تقعان على المستقيم ويُطلب منك إيجاد بعد المستقيم عن نقطة معلومة ، وهنا من النقطتين الواقعتين على المستقيم عليك إيجاد معادلة خط المستقيم ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$) حيث م ميل الخط المستقيم .

مثال

جد بعد النقطة (٠ ، ٢) عن المستقيم المار بالنقطتين (٢ ، ١) ، (٣ ، ٥)

الحل :

- جد الميل أولاً ==> م = $\frac{ص_{٢} - ص_{١}}{س_{٢} - س_{١}}$ = $\frac{٥ - ١}{٣ - ٢}$ = ٤
- معادلة الخط المستقيم : ص - ص$_{١}$ = م (س - س$_{١}$) اختر نقطة تقع على المستقيم لتعوضها في المعادلة ، ولتكن النقطة (٣ ، ٥) ، إذن :

ص - ٥ = ٤ (س - ٣) ==> ص - ٥ = ٤ س - ١٢ ==> ٤س - ص - ٧ = ٠

- بعد كتابة المعادلة بالصورة العامة : حدد أ = ٤ ، ب = - ١ ، جـ = - ٧
- واحداثيات النقطة (٠ ، ٢) : س$_{١}$ = ٠ ، ص$_{١}$ = ٢

$$ف = \left|\frac{أ س_{١} + ب ص_{١} + جـ}{\sqrt{أ^{٢} + ب^{٢}}}\right| = \left|\frac{٤ \times ٠ + (-١) \times ٢ + (-٧)}{\sqrt{٤^{٢} + (-١)^{٢}}}\right| = \left|\frac{٠ - ٢ - ٧}{\sqrt{١٦ + ١}}\right| = \frac{٩}{\sqrt{١٧}}$$

>>أمثلة منوعة

مثال

اكتب المعادلات التالية بالصورة العامة لمعادلة المستقيم

١) ص = ٤ - ٢ س   ٢) ص = $\frac{٢}{٣}$ س - ١

الحل :

الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم : أ س + ب ص + جـ = صفر

١) ص = ٤ - ٢س انقل ٤ - ٢س إلى جهة اليمين من المعادلة ورتبها :

إذن : ص - ٤ + ٢س = ٠ ==> ٢س + ص - ٤ = ٠

٢) ص = $\frac{٢}{٣}$ س - ١ ==> - $\frac{٢}{٣}$ س + ص + ١ = ٠

ويمكنك ضرب المعادلة بـ ٣ فتصبح - ٢س + ٣ص + ٣ = ٠

مثــال

جد بعد النقطة د (- ١ ، - ٣) ، عن المستقيم ل الذي معادلته ص = - $\frac{٣}{٤}$ س - $\frac{٣}{٢}$

الـحل :

- اضرب المعادلة بـ ٤ واجعلها بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

٤ص = - ٣س - ٦ <== ٣س + ٤ص + ٦ = ٠ وهي الصورة العامة .

- إذن : أ = ٣ ، ب = ٤ ، جـ = ٦ والنقطة : $\text{س}_{١}$ = - ١ ، $\text{ص}_{١}$ = - ٣

$$\text{ف} = \left| \frac{\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}} \right| = \left| \frac{٣ \times -١ + ٤ \times -٣ + ٦}{\sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢}}} \right| = \left| \frac{-٣ - ١٢ + ٦}{\sqrt{٩ + ١٦}} \right| = \frac{٩}{٥}$$

مثــال

جد البعد بين المستقيمين المتوازيين :

$\text{ل}_{١}$: ٨ س - ٦ ص = - ٤ $\text{ل}_{٢}$: ٤ س - ٣ ص = ١

الـحل :

- لإيجاد البعد بين مستقيمين متوازيين نقوم بتعيين نقطة على أحدهما ويكون البعد بين النقطة والمستقيم الآخر هو البعد بين المستقيمين المطلوب ، إذن :
- اجعل $\text{ل}_{١}$ ، $\text{ل}_{٢}$ بالصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم

$\text{ل}_{١}$: ٨ س - ٦ ص + ٤ = ٠ $\text{ل}_{٢}$: ٤ س - ٣ ص - ١ = ٠

- عيّن نقطة على المستقيم $\text{ل}_{١}$ بجعل ص = ٠

إذن ٨ س - ٦ × ٠ + ٤ = ٠ <== ٨ س = - ٤ ومنها س = - ٠,٥

∴ النقطة (-٠,٥ ، ٠) تقع على المستقيم $\text{ل}_{١}$

- الآن جد بعد النقطة (- ٠,٥ ، ٠) عن المستقيم ٤س - ٣ ص - ١ = ٠

أ = ٤ ، ب = - ٣ ، جـ = - ١ ، $\text{س}_{١}$ = - ٠,٥ ، $\text{ص}_{١}$ = ٠

$$\text{ف} = \left| \frac{\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}} \right| = \left| \frac{٤ \times -٠,٥ + (-٣) \times ٠ + (-١)}{\sqrt{٤^{٢} + (-٣)^{٢}}} \right| = \left| \frac{-٢ + ٠ - ١}{\sqrt{١٦ + ٩}} \right| = ٠,٦$$

الفصل الثاني : خصائص الأشكال الهندسية

أولا : خصائص المُثلث (١)

<< نظرية :

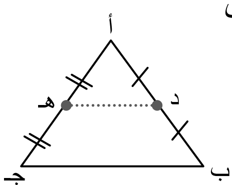
طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث تساوي نصف طول الضلع الثالث وتوازيه

⋆ لاحظ في الشكل المجاور Δ أ ب جـ فيه النقطتان د ، هـ تنصفان الضلعين

أ ب ، أ جـ على الترتيب وحسب النظرية فإنّ :

• د هـ = $\frac{١}{٢}$ ب جـ

• د هـ // ب جـ ،،، أي أن م د هـ = م ب جـ .



☝ **تذكر** : إحداثيات نقطة منتصف قطعة مستقيمة هي : $\left(\frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢}{٢} \text{ ، } \frac{\text{ص}_١ + \text{ص}_٢}{٢}\right)$

مثال

إذا كانت أ (٠ ، ٣) ، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٠ ، ٠) رؤوس مثلث ، جد طول القطعة الواصلة بين منتصف أ ب ، أ جـ .

الحل:

بحسب النظرية فإنّ طول القطعة الواصلة بين منتصف أ ب ، أ جـ تساوي $\frac{١}{٢}$ ب جـ

إذن جد طول ب جـ باستخدام قانون المسافة بين نقطتين :

• طول ب جـ = $\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$

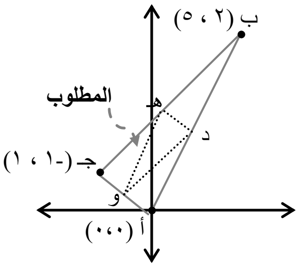
= $\sqrt{(٠ - ٣)^٢ + (٠ - ٢)^٢}$ ب (٣ ، ٢) ، جـ (٠ ، ٠)

= $\sqrt{١٣}$

∴ طول القطعة الواصلة بين منتصف أ ب ، أ جـ = $\frac{١}{٢}\sqrt{١٣}$

مثـال

إذا كانت أ (٠، ٠) ب (٢ ، ٥) جـ (-١ ، ١) رؤوس مثلث وكانت النقاط د ، هـ ، و منتصفات الاضلاع أب ، ب جـ ، أ جـ على التوالي ، جد محيط المثلث د هـ و .



الحل :

★ **محيط المثلث دهـ و= مجموع أطوال أضلاعه**

• طول د هـ = $\frac{١}{٢}$ طول أ جـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{(٠ - ١-)^{٢} + (١ - ٠)^{٢}}$

$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٢} \approx ٠,٧١$

• طول هـ و = $\frac{١}{٢}$ طول أ ب = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{(٢ - ٠)^{٢} + (٥ - ٠)^{٢}}$

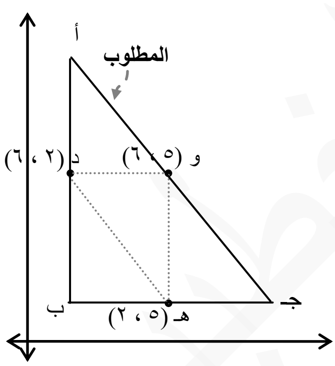
$= \frac{١}{٢} \times \sqrt{٢٩} \approx ٢,٧$

• طول د و = $\frac{١}{٢}$ طول ب جـ = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{(١- - ٢)^{٢} + (١ - ٥)^{٢}} = \frac{١}{٢}\sqrt{٢٥} = ٢,٥$

∴ محيط ∆ د هـ و = ٠,٧١ + ٢,٧ + ٢,٥ = ٥,٩١ وحدة طول .

مثـال

أ ب جـ مثلث فيه د (٢ ، ٦) منتصف أ ب ، هـ (٥ ، ٢) منتصف ب جـ ، و (٥ ، ٦) منتصف أ جـ ، جد محيط المثلث أ ب جـ .



الحل :

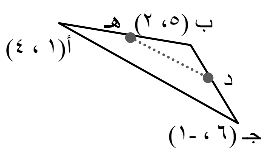
• أ جـ = ٢ × هـ د = ٢ × $\sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٢ - ٦)^{٢}}$ = ٢ × ٥ = ١٠

• أ ب = ٢ × هـ و = ٢ × $\sqrt{(٥ - ٥)^{٢} + (٦ - ٢)^{٢}}$ = ٢ × ٤ = ٨

• ب جـ = ٢ × د و = ٢ × $\sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (٦ - ٦)^{٢}}$ = ٢ × ٣ = ٦

∴ محيط ∆ أ ب جـ = ١٠ + ٨ + ٦ = ٢٤ وحدة طول .

مثـال



إذا كانت أ (١ ، ٤) ، ب (٥ ، ٢) ، جـ (٦ ، - ١) رؤوس مثلث :

أ) جد طول القطعة الواصلة بين منتصف أ ب ، ب جـ .

ب) بين أنّ القطعة الواصلة بين منتصف أ ب ، ب جـ توازي أ جـ

الحل :

أ) طول القطعة $= \frac{1}{2}$ أ جـ $= \frac{1}{2} \times \sqrt{(\text{س}_2 - \text{س}_1)^2 + (\text{ص}_2 - \text{ص}_1)^2}$

$= \frac{1}{2} \times \sqrt{(6 - 1)^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{12{,}5}$

ب) الآن نجد ميل $_{\text{أ جـ}}$ ، وميل (القطعة الواصلة بين منتصفي أ ب ، ب جـ) أي ميل $_{\text{د هـ}}$

د $= \left(\frac{6 + 5}{2} ، \frac{-1 + 2}{2}\right) = (5{,}5 ، 0{,}5)$

هـ $= \left(\frac{1 + 5}{2} ، \frac{4 + 2}{2}\right) = (3 ، 3)$

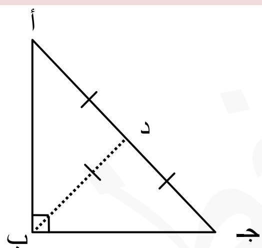
<== • ميل $_{\text{د هـ}} = \frac{0{,}5 - 3}{5{,}5 - 3} = -1$

• ميل $_{\text{أ جـ}} = \frac{-1 - 4}{6 - 1} = -1$ وبما أن ميل $_{\text{أ جـ}}$ = ميل $_{\text{د هـ}}$ ∴ د هـ // أ جـ

ثانيا : خصائص المثلث (٢)

>> نظرية :

طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي نصف طول الوتر .



★ انظر الشكل المجاور ، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، إنّ طول ب د (القطعة الواصلة بين رأس القائمة إلى منتصف الوتر) يساوي طول جـ د (نصف الوتر) ويساوي طول أ د (نصف الوتر)

وعليه فإنّ طول الوتر = ٢ × طول ب د

مثال

أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، د منتصف أ جـ بحيث أنّ ب (٠، ٦) ، د (-٢ ، ٤) جد طول أ جـ .

الحل :

• نجد طول ب د باستخدام قانون المسافة بين نقطتين فيكون طول أ جـ = ٢ × ب د

• ب د $= \sqrt{(-2 - 0)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{8}$ ∴ طول أ جـ $= 2\sqrt{8}$

مثـال

إذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، وكانت د منتصف أ جـ ، بحيث أنّ ب (-١، ٢) د (٣ ، ٧) فما طول الوتر في المثلث أ ب جـ ؟

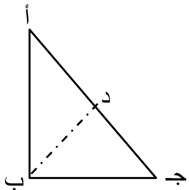
الـحل :

• طول ب د = $\sqrt{(٣ - (-١))^{٢} + (٧ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٤١}$ ∴ طول الوتر = ٢ $\sqrt{٤١}$ وحدة طول

مثـال

إذا كان أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في ب ، وكانت د منتصف أ جـ بحيث أن :

أ (-١ ، ٣) ب (١ ، ١) جـ (-١ ، -١) جد طول ب د .



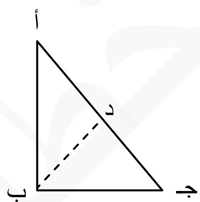
الـحل :

• طول ب د = $\frac{١}{٢}$ طول أ جـ

• طول ب د = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{(-١ - (-١))^{٢} + (-١ - ٣)^{٢}} = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$ وحدة طول.

مثـال

إذا كانت أ (٢، ٤) ، ب (٠ ، ٣) ، جـ (١ ، ١) رؤوس مثلث أثبت باستخدام الميل أنّ هذا المثلث قائم الزاوية ثم احسب طول القطعة الواصلة بين رأس القائمة ومنتصف الوتر



الـحل :

• $م_{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٤ - ٣}{٢ - ٠} = \frac{١}{٢}$

• $م_{ب جـ} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ١}{٠ - ١} = -٢$

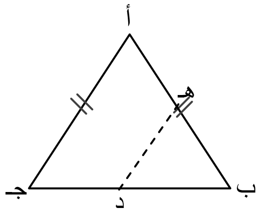
• بما أنّ : $م_{أب} \times م_{ب جـ} = \frac{١}{٢} \times -٢ = -١$ ∴ أب ⊥ ب جـ أي أن ∆ قائم في ب

• طول القطعة الواصلة بين رأس القائمة و منتصف الوتر (ب د) = $\frac{١}{٢} \times$ أ جـ

∴ طول ب د = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{(٢ - ١)^{٢} + (٤ - ١)^{٢}} = \frac{١}{٢} \times \sqrt{١٠} \approx ١,٦$ وحدة طول

مثـال

إذا كان أ ب جـ مثلثاً متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ وكانت د منتصف ب جـ ، هـ منتصف أ ب ، حيث د (٢ ، ١) هـ (٣ ، ٥) ، فما طول أ ب ؟

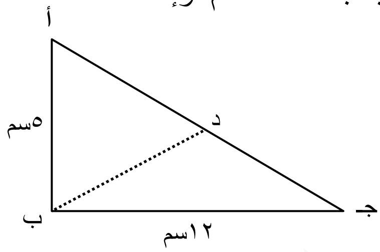


الحل :

- طول هـ د = $\sqrt{(٣ - ٢)^{٢} + (٥ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{١٧}$ وحدة طول
- طول أ جـ = ٢ $\sqrt{١٧}$ وحدة طول
- وبما أنّ أ ب = أ جـ ،، ∴ طول أ ب = ٢ $\sqrt{١٧}$ وحدة طول

مثـال

إذا كان أ ب جـ مثلثاً قائم الزاوية في ب ، فيه أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ١٢ سم وإذا كانت د منتصف أ جـ ، فما طول د ب ؟



الحل :

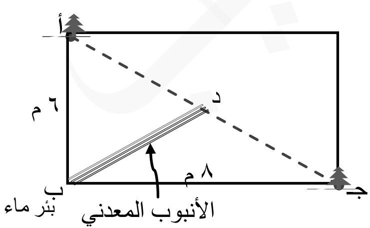
(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

(أ جـ)^{٢} = (٥)^{٢} + (١٢)^{٢} ==> (أ جـ)^{٢} = ١٦٩

بأخذ الجذر ينتج أ جـ = ١٣ ==> ب د = $\frac{١}{٢}$ × ١٣ = ٦,٥سم .

مثـال

زرع أبو عليّ شجرتين عند رأسيْ زاويتي حديقة منزله مستطيلة الشكل ، التي أبعادها كما هو مبين في الشكل.
أراد أبو علي أن يمد أنبوباً معدنياً مستقيماً لريّ الشجـرتين ، بحيث يتصل أحدُ طرفي الأنبوب ببئر الماء ويكون الطرف الآخر للأنبـــوب عند منتصف المسافة بين الشجرتين ، فكم يبلغ طول هذا الأنبوب المعدني ؟



الحل :

- طول الأنبوب ب د = $\frac{١}{٢}$ طول أ جـ
- (أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}
- (أ جـ)^{٢} = (٦)^{٢} + (٨)^{٢} ==> (أ جـ)^{٢} = ١٠٠

∴ أ جـ = ١٠ متر

∴ ب د = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ = ٥ م .

ثالثا : خصائص متوازي الأضلاع

➤➤ معلومات هامة

★ **متوازي الأضلاع** ⇤ فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين .

★ **شبه المُنحرف** ⇤ فيه ضلعان متوازيان فقط .

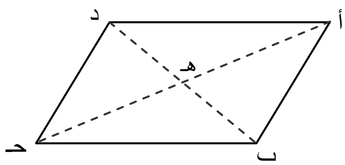
★ **المعين** ⇤ أقطاره مُتعامدة .

★ **المربع** ⇤ زواياه قوائم وفيه كل ضلعين متقابلين متوازيين وأطوال أضلاعه متساوية.

★ **المستطيل** ⇤ زواياه قوائم وفيه كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتطابقين .

✻ نظرية ✻

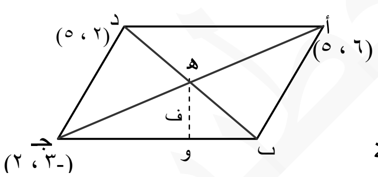
✻ قطرا متوازي الأضلاع يُنصف كل منهما الآخر ✻



⋆ **انظر الشكل** : أ ب جـ د متوازي أضلاع ، القطران أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر . حيثُ نقطة المنتصف (هـ) هي منتصف القطر أ جـ ، وهي كذلك منتصف القطر ب د

مثال

أ ب جـ د متوازي أضلاع ، فيه أ (٦ ، ٥) ، جـ (-٣ ، ٢) ، د (٢ ، ٥) هـ نقطة تقاطع قطرية . احسب طول العمود النازل من النقطة هـ على الضلع ب جـ .



الحل :

• **أولا** : نجد إحداثيات هـ : $\left(\frac{٦ + -٣}{٢} \text{ ، } \frac{٥ + ٢}{٢}\right)$ = (١,٥ ، ٣,٥)

• **ثانيا** : نجد معادلة المستقيم ب جـ ،، ولإيجاد المعادلة فإننا نحتاج إلى معرفة الميل ،، وبما أن ب جـ // أ د ،، إذن $م_{ب جـ} = م_{أ د}$ = $\frac{٥ - ٥}{٦ - ٢}$ <== $م_{ب جـ}$ = صفر .

• **ثالثا** : جد معادلة المستقيم ب جـ ، بأخذ نقطة تقع عليه وهي (-٣ ، ٢)

ص – ص$_١$ = م (س – س$_١$) <== ص – ٢ = ٠ (س - -٣) <== ص =٢

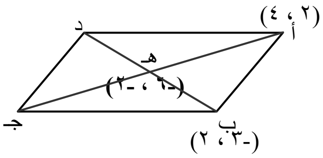
أي أن المعادلة بالصورة العامة هي : ص – ٢ = ٠

∴ أ = ٠ ب = ١ جـ = -٢ س$_١$ = ١,٥ ص$_١$ = ٣,٥

∴ هـ و = $\left|\frac{\text{أ س}_١ + \text{ب ص}_١ + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^٢ + \text{ب}^٢}}\right|$ = $\left|\frac{٠ \times ١,٥ + ١ \times ٣,٥ - ٢}{\sqrt{(٠)^٢ + (١)^٢}}\right|$ = ١,٥ وحدة طول

مثـال

إذا كان أ ب جـ د متوازي أضـــــلاع ، بحيث أ (٢ ، ٤) ، ب (-٣ ، ٢) ، وكانـت هـ (-٦ ، -٢) نقطة تقاطع قطرية ، جد طول كل من القطرين .



الحل :

- طول القطر أجـ = ٢ × طول أ هـ

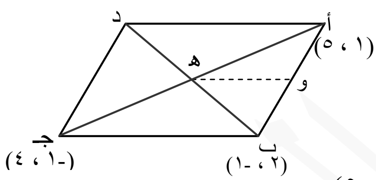
$$= \text{٢} \times \sqrt{(\text{٢} - (-\text{٦}))^{\text{٢}} + (\text{٤} - (-\text{٢}))^{\text{٢}}} = \text{٢} \times \text{١٠} = \text{٢٠}$$

- طول القطر ب د = ٢ × طول ب هـ

$$= \text{٢} \times \sqrt{(-\text{٣} - (-\text{٦}))^{\text{٢}} + (\text{٢} - (-\text{٢}))^{\text{٢}}} = \text{٢} \times \text{٥} = \text{١٠}$$

مثـال

إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع ، بحيث أ (١ ، ٥) ، ب (٢ ، -١) ، جـ (-١ ، ٤) جد بُعد نقطة تقاطع قطرية عن الضلع أ ب .



الحل :

- **أولا** : نجد إحداثيات هـ : $\left(\frac{\text{١} + -\text{١}}{\text{٢}} ، \frac{\text{٥} + \text{٤}}{\text{٢}}\right) = (\text{٠} ، \text{٤,٥})$
- **ثانيا** : نجد معادلة المستقيم أ ب ،، خد نقطة تقع عليه ولتكن أ (١ ، ٥)
- $\text{م}_{\text{أب}} = \frac{\text{٥} - -\text{١}}{\text{١} - \text{٢}} = -\text{٦}$
- $\text{ص} - \text{ص}_{\text{١}} = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_{\text{١}})$ ==> ص – ٥ = -٦ (س - ١) ==> ص =-٦س + ١١

أي أن المعادلة بالصورة العامة هي : ٦س + ص – ١١ = ٠

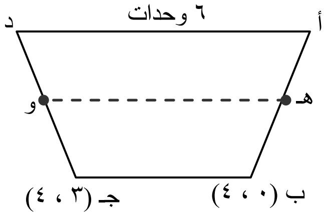
∴ أ = ٦ ب = ١ جـ = -١١ $\text{س}_{\text{١}} = \text{٠}$ $\text{ص}_{\text{١}} = \text{٤,٥}$

$$\therefore \text{هـ و} = \left|\frac{\text{أ س}_{\text{١}} + \text{ب ص}_{\text{١}} + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{\text{٢}} + \text{ب}^{\text{٢}}}}\right| = \left|\frac{\text{٦} \times \text{٠} + \text{١} \times \text{٤,٥} - \text{١١}}{\sqrt{(\text{٦})^{\text{٢}} + (\text{١})^{\text{٢}}}}\right| = \text{١,٠٧ وحدة طول}$$

> كم يرفع العلم أشخاصًا إلى رتب   ويخفض الجهل أشرافًا بلا أدب

مثـال

إذا كان أ ب جـ د شبه منحرف ، فيه ب جـ // أ د ، ب (٠ ، ٤) ، جـ (٣ ، ٤) وكان أ د = ٦ وحدات ، فما طول القطعة الواصلة بين منتصف أ ب ، جـ د ؟



الحل :

• طول هـ و = $\frac{١}{٢}$ (أ د + ب جـ) .. نظرية

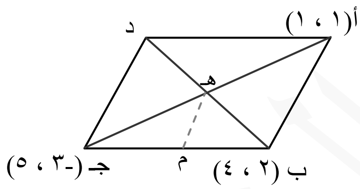
• طول ب جـ = $\sqrt{(٠ - ٣)^٢ + (٤ - ٤)^٢}$ = ٣

∴ طول هـ و = $\frac{١}{٢}$ (أ د + ب جـ)

= $\frac{١}{٢}$ (٦ + ٣) = ٤,٥ وحدة طول .

مثـال

إذا كان أ ب جـ د متوازي أضلاع ، بحيث أ (١ ، ١) ، ب (٢ ، ٤) ، جـ (-٣ ، ٥) وكانت هـ نقطة تقاطع قطريه ، وكانت م منتصف ب جـ ، فما طول القطعة هـ م ؟



الحل :

• جد احداثيات هـ = ($\frac{١ + -٣}{٢}$ ، $\frac{١ + ٥}{٢}$) = (-١ ، ٣)

• جد احداثيات م = ($\frac{٢ + -٣}{٢}$ ، $\frac{٤ + ٥}{٢}$) = (-٠,٥ ، ٤,٥)

• الآن جد طول هـ م = $\sqrt{(-١ - (-٠,٥))^٢ + (٣ - ٤,٥)^٢}$

= $\sqrt{(-٠,٥)^٢ + (-١,٥)^٢}$ = $\sqrt{٢,٥}$ = ١,٥٨ وحدة طول .

وأيضا يُمكنك حل السؤال بطريقة أُخرى بناءً على نظرية أخذتها في درس سابق وهي

" طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث تساوي نصف طول الضلع الثالث وتوازيه " .

ففي Δ أ ب جـ ، هـ منتصف أ جـ ، كذلك م منتصف ب جـ

∴ هـ م = $\frac{١}{٢}$ أ ب ... (نظرية)

هـ م = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{(٢ - ١)^٢ + (٤ - ١)^٢}$ = $\frac{\sqrt{١٠}}{٢}$ = $\frac{\sqrt{٥} \times \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}}$ = $\sqrt{\frac{٥}{٢}}$ = $\sqrt{٢,٥}$

مع تمنياتي للجميع بالتوفيق : المعلمة سلسبيل الخطيب

للاستفسار : واتسب فقط ٠٧٨٨٢٠٧٤٧٢