الملاذ في مهارات الرياضيات

2025

الاستاذ حمزة ابو الفول

الصف الثاني عشر- المسار الأكاديمي

الفصل الدراسي الأول

استعـد لدراسة الوحدة

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية

0772259503

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

1 الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

2 قسمة كثيرات الحدود (القسمة الطويلة)

3 تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

4 طرائقُ حلِّ المُعادلات التربيعيَّة

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

1 إخراج العامل المشترك الأكبر

2 تحليلُ الفرق بينَ مُرَبَّعَيْن

3 تحليلُ المُرَبَّعات الكاملة

4 الصورة القياسية: $x^2 + bx + c = 0$

5 الصورة القياسية: $ax^2 + bx + c = 0$

B حلُّ المُعادلات التربيعيَّة باستعمال الجذر التربيعيِّ

C حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

D حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

5 طرائق حل المعادلات التكعيبية البسيطة (من الدرجة الثالثة)

تحليلُ مجموع مُكَعَّبَيْن أو تحليلُ الفرق بينَهُما، وحلُّ معادلتهما

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

1 حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترَك

2 حلُّ المُعادلات بالتجميع

3 تحليلُ مُعادلات على الصورة التربيعيَّة

7 تبسيط المقادير النسبية

1 تبسيط المقادير النسبية

2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

3 ضرب المقادير الجبرية النسبية

4 قسمةُ المقادير الجبرية النسبية

1 الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

الاقتران وحيد الحدِّ بمُتغيِّر واحد

هوَ اقتران قاعدته ناتج ضرب عدد حقيقيٍّ (يسمّى المعامل) في مُتغيِّرٍ أُسُّهُ عددٌ صحيحٌ غيرُ سالب

والجدولُ الآتي يعرضُ بعضَ الأمثلةِ على وحيدِ الحدِّ، وأسِّهِ، ومعاملِهِ:

وحيدُ الحدِّ	$3x^2$	$-\frac{1}{2}x^5$	$\sqrt{7}x^3$	x	9
الأُسُّ	2	5	3	1	0
المعاملُ	3	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{7}$	1	9

الاقتران كثير الحدود (بمتغيّر واحد)

هوَ اقترانٌ يتكوَّنُ منْ وحيدِ حدٍّ واحدٍ ، أو مجموع عِدَّةِ اقتراناتٍ وحيدةِ الحدِّ بمُتغيِّرٍ واحدٍ

ومنْ أمثلته الاقترانات الآتية

$f(x)=2$

$f(x)=3x-4$

$f(x)=x^2+4x-5$

$g(x)=-3x^2+1.5x^4-3$

الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

الصورة العامة لكثير الحدودِ: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0$

حيث: n: عددٌ صحيحٌ غيرُ سالبٍ.

$a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots , a_1 , a_0$: أعدادٌ حقيقيةٌ تُسمّى معاملاتِ حدودِ كثير الحدود.

المعامل الرئيس إذا كان $a_n \neq 0$ ، فإنَّه يسمّى **المعامل الرئيس**

درجة كثير الحدود **درجة** كثير الحدود (n) هيَ أكبرُ أسٍّ للمُتغيِّر في جميع حدوده

لتحديد درجة كثير الحدود، تنظر إلى جميع حدود كثير الحدود وتجد الحد الذي يحتوي على المتغير بأعلى أس

الحـــد الثابـــت ويسمّى a_0 الحدَّ الثابت.

الصورة القياسية يكـــون كثير الحدود مكتوبًا **بالصورةِ القياســـيةِ** إذا كانَتْ حدودُهُ مكتوبةً بترتيب تنازليٍّ منْ أكبرِها درجةً إلى أصغرِ درجةً.

لكتابة كثير الحدود بالصورة القياسية، يتم ترتيب حدوده من

القوة الأعلى إلى القوة الأقل

كثير الحدود الصفري $(f(x) = 0)$ هو كثيرُ الحدودِ الذي جميعُ معاملاتِهِ أصفارٌ ليسَ لهُ درجةٌ، ويُمثِّلُهُ المحورُ x في المستوى الإحداثيِّ.

الصورةُ العامةُ لكثير الحدود

مثال أحـدِّدُ إذا كانَ كل ممّـا يأتـي كثيـرَ حـدودٍ أمْ لا. وفـي حـال كانَ كثيرَ حـدودٍ أكتبـه بالصورة القياسـية ، ثـمَّ أحـدِّدُ المُعامـلَ الرئيـسَ، والدرجةَ، والحـدَّ الثابتَ:

1) $f(x) = -4 + 6x - 2x^3 + x^2$

كثير حدود

الصورة القياسية $f(x) = -2x^3 + x^2 + 6x - 4$

الدرجة 3

المعامل الرئيس -2

الحد الثابت -4

2) $g(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$

ليس كثير حدود لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الثاني هوَ -1

الصورة القياسية

الدرجة

المعامل الرئيس

الحد الثابت

3) $h(x) = \sqrt{x} + 7$

ليس كثير حدود لأنَّ أُسَّ المُتغيِّرِ في الحدِّ الأولِ هوَ $\frac{1}{2}$

الصورة القياسية

الدرجة

المعامل الرئيس

الحد الثابت

4) $k(x) = \frac{3x^2 - 5}{4} + 2x$

كثير حدود

الصورة القياسية $k(x) = \frac{3}{4}x^2 + 2x - \frac{5}{4}$

الدرجة 2

المعامل الرئيس $\frac{3}{4}$

الحد الثابت $-\frac{5}{4}$

لأيِّ عددٍ حقيقيٍّ $a \neq 0$، فإنَّ: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. وإذا كانَ a مرفوعًا للقوَّةِ السالبةِ في المقامِ، فإنَّ: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$

2 قسمة كثيرات الحدود (القسمة الطويلة)

- هي طريقة موجودة في الصف العاشر الاساسي
- تُستخدم لقسمة كثير حدود (المقسوم) على كثير حدود آخر (المقسوم عليه).
- يجب كتابة كل من المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية (من أعلى قوة إلى أقل قوة) قبل البدء بالقسمة
- خطوات قسمة كثيرِ حدود على آخرَ تشـبه كثيرًا عمليةَ قسمةِ عددٍ كليٍّ على آخرَ
  إذْ تُتَّبَع الخطوات نفسُها في كلتا الحالتيْن
- يمكِن قسمة كثير الحدودِ $f(x)$ على كثيرِ الحدودِ $h(x) \neq 0$ إذا كانَتْ درجة $f(x)$ أكبرَ منْ أوْ تسـاوي درجة $h(x)$

⟸ لقســمة كثير حدودٍ على آخر

⟸ أكتبُ المقســومَ والمقسومَ عليْه بالصورةِ القياسـيةِ

⟸ وإذا كانَتْ إحدى قوى المُتغيِّر في المقسوم مفقودةً، فإنّي أضيفها في موقعِها، وأكتبُ معاملها 0

⟸ ثم قسمة الحد الرئيس (الذي يحتوي على أعلى درجة) في المقسوم على الحد الرئيس في المقسوم عليه

⟸ ثم يتم ضرب الناتج بالكامل المقسوم عليه.

⟸ بعد الضرب، يتم طرح الناتج من الجزء المقابل في المقسوم، أو يمكن عكس إشارات الناتج ثم الجمع.

⟸ تتكرر عملية قســمةِ كثيـراتِ الحدودِ حتى تصبح درجة الباقي أقل من درجة المقسوم عليه

⟸ يكتب ناتج القسمة عادةً بالصورة التالية : **ناتج القسمة + (الباقي / المقسوم عليه**

⟸ درجـة ناتـج القسـمة **تساوي الفرق** بيـن درجتَـي المقسـوم والمقسـوم عليـه.

⟸ للتحقق من صحة الحل، يمكن استخدام العلاقة : **(ناتج القسمة × المقسوم عليه) + الباقي = المقسوم**

ادرس خطوات القسمة كما في المثال الاول على الصفحة التالية

قسمةُ كثيرات الحدود

مثال أَجد ناتجَ قسمةِ $f(x) = 2x^3 + 24x - 15$ على $g(x) = x + 5$، وباقيَها.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 - 10x + 74 \\ \hline x+5 & 2x^3 + 0x^2 + 24x - 15 \\ & \underline{(-)\ 2x^3 + 10x^2} \\ & \quad -10x^2 + 24x \\ & \underline{(-)\ -10x^2 - 50x} \\ & \qquad 74x - 15 \\ & \underline{(-)\ 74x + 370} \\ & \qquad -385 \end{array}$$

بقسمةِ $2x^3$ على x وكتابةِ النتيجةِ $2x^2$ فوقَ الحدِّ المشابهِ

بضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $2x^2$

بالطرحِ، وإضافة الحدِّ $(24x)$

بقسمةِ $-10x^2$ على x، وكتابةِ النتيجةِ $-10x$ فوقَ الحدِّ المشابهِ، ثمَّ ضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في $-10x$

بالطرحِ، وإضافة الحدِّ (-15)

بقسمةِ $74x$ على x، وكتابةِ النتيجةِ 74 فوقَ الحدِّ الثابتِ، وضربِ المقسومِ عليْهِ $(x+5)$ في 74

بالطرحِ

درجة باقي القسمةِ أقلُّ منْ درجةِ المقسومِ عليهِ. تنتهي عملية القسمة

إذنْ، ناتجُ القسمةِ هوَ: $2x^2 - 10x + 74$، والباقي -385، ويُمكِنُ كتابةُ ذلكَ كما يأتي:

$$\frac{2x^3 + 24x - 15}{x+5} = 2x^2 - 10x + 74 + \frac{-385}{x+5},\ x \neq -5$$

أتحقَّقُ منْ صحَّةِ الحلِّ: يُمكِنُ التحققُ منْ صحَّةِ القسمةِ بضربِ الناتجِ في المقسوم عليْهِ، وإضافة الباقي فإذا كانَتِ النتيجةُ مساويةً للمقسوم كانَ الحلُّ صحيحًا.

(المقسوم) = (الباقي) + (المقسوم عليْه)(الناتج)

$$\left(\underbrace{\boxed{2x^2-10x+74}}_{\text{الناتج}}\right)\left(\underbrace{\boxed{x+5}}_{\text{المقسوم عليه}}\right)+\left(\underbrace{\boxed{-385}}_{\text{الباقي}}\right) = 2x^3 - 10x^2 + 74x + 10x^2 - 50x + 370 - 385$$

$$= 2x^3 + (-10+10)x^2 + (74-50)x - 15$$

$$= \left(\underbrace{\boxed{2x^3 + 24x - 15}}_{\text{المقسوم}}\right) \checkmark$$

مراجعة قســـمة كثير حدود على كثير حدود آخر باســـتعمال القســـمة الطويلة

مثال استعمل القسمة الطويلة لإيجاد ناتج قسمة $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12)$ على $(x + 4)$ كما يأتي:

قبل البدء بقسمة كثيرات الحدود، أكتب المقسوم والمقسوم عليه بالصورة القياسية

المقسوم

ناتج القسمة ← $x^2 - 2x - 3$

المقسوم عليه ← $x + 4 \overline{)\, x^3 + 2x^2 - 11x - 12}$

$x^3 + 4x^2$ بالضرب في x^2

بالطرح

$-2x^2 - 11x$

$-2x^2 - 8x$ بالضرب في $-2x$

بالطرح

$-3x - 12$

$-3x - 12$ بالضرب في -3

بالطرح

باقي القسمة ← 0

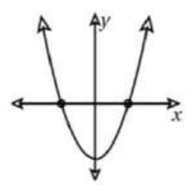
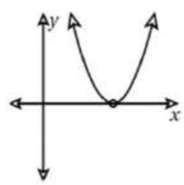
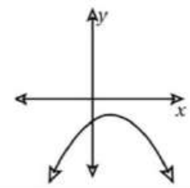
تتوقّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

3 تحديد عدد حلول المعادلة التربيعية

يمكن تحديد عددِ الحُلــولِ الحقيقيَّةِ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ قبلَ حلِّها باســتعمالِ **المُمَيِّز** وَهُوَ المقدارُ التربيعيُّ الذي يقعُ أسفلَ الجذرِ التربيعيِّ في القانونِ العامِّ $(b^2 - 4ac)$، وَيُرمَزُ إليهِ بالرَّمزِ Δ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ ← **المُميِّزُ**

مُمَيِّزُ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ هُوَ $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$

إشارةُ المُمَيِّزِ Δ	$\Delta > 0$ موجبٌ	$\Delta = 0$ صفرٌ	$\Delta < 0$ سالبٌ
عددُ الحُلولِ	حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ	حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ	لا توجدُ حُلولٌ حقيقيَّةٌ
مثالٌ بيانيٌّ			

مثال أحدّدُ عددَ الحُلولِ الحقيقيَّةِ لكلِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ ممّا يأتي باستعمالِ المُمَيِّزِ:

1) $x^2 - 4x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4$$

بما أنَّ $0 < \Delta$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

2) $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(1) = 0$$

بما أنَّ $0 = \Delta$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

3) $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$$

بما أنَّ $0 > \Delta$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

4 طرائقُ حلِّ المَعادلات التربيعيَّة

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ

معادلـة يمكـن كتابتهـا علـى الصـورة: $ax^2 + bx + c = 0$، حيث $a \neq 0$

والتي تسـمّى الصورة القياسيَّةَ للمعادلةِ التربيعيَّة

لكل مُعادلةٍ تربيعيَّة اقتران تربيعيٌّ مرتبط بها يمكن الحصول عليهِ بوضع $f(x)$ بدلًا من العدد 0

الاقترانُ التربيعيُّ المُرتبطُ بالمُعادلةِ	المُعادلةُ التربيعيَّةُ
$f(x) = 2x^2 - 3x + 8$	$2x^2 - 3x + 8 = 0$

حلُّ المَعادلة التربيعيَّة

يمكنُ حلُّ المعادلةِ التربيعيَّةِ بتحديدِ قِيَم x التي يقطع عندها منحنى الاقترانِ التربيعيِّ المرتبط بالمُعادلـةِ المحورَ x

وتسـمّى تلكَ القِيم **جذور المعادلـة** أو **أصفارَ الاقتران**

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ 4 طرائقُ حلِّ المُعادلات التربيعيَّة

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

لحل المُعادلاتِ التربيعيَّةِ بالتحليلِ، أتّبع الخطوات الآتيَةَ:

1. أنقل جميع الحدود إلى الطرف الأيســر منَ المُعادلــة، وأترك الصِّفرَ في الطرف الأيمن.
2. أحلّلُ المقدارَ الجبريَّ في الطرفِ الأيسرِ من المُعادلةِ على صورة حاصل ضرب عامليْن.
3. أُســاوي كلَّ عامل بالصِّفر (خاصيَّة الضَّرب الصِّفريِّ)، وَأَحُلُّ كلَّ معادلة خطيَّة.
4. حلول المُعادلةِ التربيعيَّة هي حلول المعادلتين الخطيّتَين.

خاصيَّة الضَّربِ الصِّفريّ إذا كانَ حاصلُ ضربِ عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ يُســاوي صِفرًا فإنَّ أحدَهُما على الأقلِّ يجبُ أنْ يكونَ صِفرًا.

أي أن إذا كانَ a وَ b عددَيْنِ حقيقيَّيْنِ، وكانَ $ab = 0$، فإن: $b = 0$ or $a = 0$

التحليل الكامل للمقدار الجبري هــو كتابــة مقــدارٍ جبــريٍّ بالصــورةِ التحليليَّةِ مثل:

- $x^2 + 5x = x(x+5)$
- $x^2 + 3x + 2 = (x+2)(x+1)$

تستعمل خاصيَّة الضَّرب الصِّفريِّ والتحليل لحلِّ المُعادلات التربيعيَّةِ فإذا كان أحد طرفيْ معادلــةٍ مكتوبًا بالصورةِ التحليليَّــة والطرف الآخر هو 0 فيمكن اســتعمال خاصيَّةِ الضرَّب الصِّفريِّ لحلها.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

1 حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل: إخراج العامل المشترك الأكبر

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 = x$

$\Rightarrow x^2 = x$

$\Rightarrow x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x(x+1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -1$

2 $x^2 = -5x$

$\Rightarrow x^2 = -5x$

$\Rightarrow x^2 + 5x = 0$

$\Rightarrow x(x+5) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, -5$

3 $6x^2 = 20x$

$\Rightarrow 6x^2 = 20x$

$\Rightarrow 6x^2 - 20x = 0$

$\Rightarrow 2x(3x - 10) = 0$

$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, \frac{10}{3}$

4 $9x^2 = 72x$

$\Rightarrow 9x^2 = 72x$

$\Rightarrow 9x^2 - 72x = 0$

$\Rightarrow 9x(x - 8) = 0$

$\Rightarrow 9x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $0, 8$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

2 تحليلُ الفرق بينَ مُرَبَّعَيْن

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّرب الصِّفريِّ والتحليل لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مربّعَين.

الفرقُ بَيْنَ مربعَيْ حدَّينِ يساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1) $x^2 - 49 = 0$

$\Rightarrow (x-7)(x+7) = 0$

$\Rightarrow x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

or $\Rightarrow x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-7, 7$

2) $x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+6) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-6, 6$

3) $2x^2 - 50 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow (x-5)(x+5) = 0$

$\Rightarrow x-5 = 0 \Rightarrow x = 5$

or $\Rightarrow x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $5, -5$

4) $8x^2 - 50 = 0$

$\Rightarrow 4x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow (2x-5)(2x+5) = 0$

$\Rightarrow 2x-5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$

or $\Rightarrow 2x+5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

2 تحليلُ الفرق بينَ مُرَبَّعَيْن

يمكنُ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّرب الصِّفريِّ والتحليل لحلِّ مُعادلاتٍ تربيعيَّةٍ تتضمَّنُ فرقًا بينَ مربَّعَين.

الفرقُ بَيْنَ مربعَيْ حدَّينِ يساوي ناتجَ ضربِ مجموعِ الحدَّينِ في الفرقِ بينَهُما.

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 أحل المعادلة التالية : $(x-1)^2 - 49 = 0$

$$\Rightarrow \big((x-1) - 7\big)\big((x-1) + 7\big) = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow x-8 = 0 \Rightarrow x = 8$$

$$\text{or} \Rightarrow x+6 = 0 \Rightarrow x = -6$$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $8, -6$

2 أحل المعادلة التالية: $(x-2)^2 - (x+3)^2 = 0$

$$\Rightarrow \big((x-2) - (x+3)\big)\big((x-2) + (x+3)\big) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2 - x-3)(x-2 + x+3)$$

$$\Rightarrow (-5)(2x+1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

إذنْ ، الجذر هو $-\frac{1}{2}$

---

3 $y^4 - 1 = 0$

$$\Rightarrow (y^2)^2 - (1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (y^2-1)(y^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow (y-1)(y+1)(y^2+1) = 0$$

$$\Rightarrow y-1 = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{or} \Rightarrow y+1 = 0 \Rightarrow y = -1$$

$$\text{or} \Rightarrow (y^2+1) = 0 \Rightarrow y^2 = -1$$

لا يوجد حل

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -1$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلـةُ التربيعيّـةُ A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

3 تحليلُ المُرَبَّعات الكاملة

المربع الكامل هـو مقدار جبري على الصورة $(a+b)^2$ لأنَّهُ يســاوي ناتجَ ضربِ $(a+b)$ في نفسه أي $(a+b)^2$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$ ناتج ضرب

$= a^2 + ab + ab + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

يسمى مربع كامل ثلاثــي

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b)$ ناتج ضرب

$= a^2 - ab - ab + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

يسمى مربع كامل ثلاثــي

يكون المقدار الثلاثي $a^2 + 2ab + b^2$ مربع كامل ثلاثــي إذا حققَ الشروطَ الثلاثةَ الآتيةَ:

1. الحد الأول مربع كامل
2. الحدُّ الأخيرُ مربع كامل
3. الحد الأوسط يساوي ضعف ناتج ضرب الجذر التربيعيِّ لكلٍّ مِنَ الحدّينِ: الأول، والأخير

تحليلُ المربع الكامل الثلاثيِّ الحدود

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b)$$

مثال أحددُ ما إذا كانَتْ ثلاثيّةِ حدود($x^2 + 6x + 9$) تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $3 \times x \times 2$؟ نعم؛ لأنَّ $6x = 2(x)(3)$
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $9 = 3^2$

بما أنّ الشروطَ جميعَها متحققةٌ، فإنَّ $x^2 + 6x + 9$ تشكلُ مربعًا كاملًا.

$$x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$$

مثال أحددُ ما إذا كانَتْ ثلاثيّةِ حدود($x^2 + 2x + 16$) تمثلُ مربعًا كاملًا أَمْ لا، وإذا كانَتْ تمثلُهُ فأحللُها:

- هلِ الحدُّ الأولُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم
- هلِ الحدُّ الأوسطُ يساوي $4 \times x \times 2$؟ لا؛ لأنَّ $2x \neq 2(x)(4)$
- هل الحدُّ الأخيرُ مربعٌ كاملٌ؟ نعم؛ لأنَّ $16 = 4^2$

بما أنَّ الشرطَ الثانيَ غيرُ متحققٍ، فإنَّ $x^2 + 2x + 16$ ليسَتْ مربعًا كاملًا، ولا يمكنُ تحليلُهُ.

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

3 تحليلُ المُرَبَّعات الكاملة

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

2 $x^2+4x+4=0$

$$\Rightarrow x^2+2(x)(2)+2^2=0$$
$$\Rightarrow (x+2)(x+2)=0$$
$$\Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحد، هو: -2

1 $x^2+2x+1=0$

$$\Rightarrow x^2+2(x)(1)+1^2=0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1$$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحد، هو: -1

4 $9x^2+6x+1=0$

$$\Rightarrow (3x)^2+2(3x)(1)+1^2=0$$
$$\Rightarrow (3x+1)(3x+1)=0$$
$$\Rightarrow 3x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحدٌ، هُوَ: $-\frac{1}{3}$

3 $x^2-8x+16=0$

$$\Rightarrow x^2+2(x)(4)+4^2=0$$
$$\Rightarrow (x-4)(x-4)=0$$
$$\Rightarrow x-4=0 \Rightarrow x=4$$

إذنْ، للمُعادلةِ جذرٌ واحد، هو: 4

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلــةُ التربيعيَّــةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

4 الصورة القياسية: $x^2 + bx + c = 0$

إذا كانَ المقدارُ الجبريُّ $x^2 + bx + c$ قابلًا للتحليلِ، فيمكنُ أيضًا اســتعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ المكتوبةِ بالصورةِ القياسيَّةِ $x^2 + bx + c = 0$

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 8 = 0$

$\Rightarrow (x+4)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

or $\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-4, -2$

2 $x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $6, 2$

3 $x^2 + 5x = 6$

$\Rightarrow x^2 + 5x - 6 = 0$

$\Rightarrow (x-1)(x+6) = 0$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

or $\Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1, -6$

4 $x^2 - 2x - 24 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 2x + 24 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+4) = 0$

$\Rightarrow x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6$

or $\Rightarrow x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

إذن، الجذرانِ هُما: $6, -4$

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ

A حلُّ المعادلات التربيعية بالتحليل

5 الصورة القياسية: $ax^2 + bx + c = 0$

لتحليل ثلاثِــيِّ الحدودِ $ax^2 + bx + c$

⟸ أَجِدُ عددَينِ صحيحَينِ m وَn حاصلُ ضربِهِما يُســاوي (ac) ومجموعُهُمــا يُســاوي b

⟸ ثمَّ أكتــبُ $ax^2 + bx + c$ علــى الصورةِ $ax^2 + mx + nx + c$

⟸ ثمَّ أحلّلُ بتجميعِ الحدودِ.

⟸ لتســهيلِ عمليَّةِ التحليلِ مِــنَ الأفضــلِ أنْ أجعلَ معاملَ x^2 موجبًا.

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالتحليلِ أوَّلًا، ثمَّ استعمالِ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Longrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$\Longrightarrow (3x-1)(x-1) = 0$

$\Longrightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

or $\Longrightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $1 , \frac{1}{3}$

2 $30x^2 - 5x = 5$

$\Longrightarrow 30x^2 - 5x = 5$

$\Longrightarrow 30x^2 - 5x - 5 = 0$

$\Longrightarrow 6x^2 - x - 1 = 0$

$\Longrightarrow (3x+1)(2x-1) = 0$

$\Longrightarrow 3x+1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

or $\Longrightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $\frac{1}{2} , -\frac{1}{3}$

الوحدة 1 الاقترانات والمقادير الجبرية | أستعد لدراسة الوحدة | الاستاذ حمزة ابو الفول

المُعادلــةُ التربيعيّــةُ

B حلُّ المُعادلاتِ التربيعيّة باستعمال الجذر التربيعيّ

يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ على الصورةِ $x^2 = c$؛ حيثُ $c \geq 0$، باستعمالِ تعريفِ الجـــذرِ التربيعيِّ للعددِ الموجب؛ حيث: $x = \pm\sqrt{c}$

أمّا إذا لمْ تَكُن المُعادلةُ التربيعيَّةُ مكتوبةً على الصورةِ $x^2 = c$

فأســتعمل العملياتِ الجبريّةَ لكتابــةِ x^2 وحدَهُ في أحدِ طرفي المُعادلة أوّلًا، إنْ أمكَنْ

ثمَّ أَحُلُّ المُعادلةَ بأخذِ الجذرِ التربيعيِّ لكلِّ طرفٍ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow x = \pm 3$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-3, 3$

2 $3x^2 - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 27 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 = 27$

$\Rightarrow x^2 = 9$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{9}$

$\Rightarrow x = \pm 3$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-3, 3$

3 $(x+1)^2 = 64$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 54$

$\Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{64}$

$\Rightarrow x + 1 = \pm 8$

$\Rightarrow x = -1 \pm 8$

$\Rightarrow x = -1 + 8 \Rightarrow x = 7$

or $\Rightarrow x = -1 - 8 \Rightarrow x = -9$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-9, 7$

4 $(x+4)^2 = 49$

$\Rightarrow (x+4)^2 = 49$

$\Rightarrow x + 4 = \pm\sqrt{49}$

$\Rightarrow x + 4 = \pm 7$

$\Rightarrow x = -4 \pm 7$

$\Rightarrow x = -4 + 7 \Rightarrow x = 3$

or $\Rightarrow x = -4 - 7 \Rightarrow x = -11$

إذنْ، الجذرانِ هُما: $-11, 3$

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ

c حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

اذا واجهت صعوبة في التحليل فالمنقذ هو المميز والقانون العام

يمكنُ حلُّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ $ax^2 + bx + c = 0$ بالقانونِ العامِّ على النَّحوِ الآتي:

- اذا كان $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac > 0$ فإن للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- واذا كان $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac = 0$ فإن للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ $x = \frac{-b}{2a}$
- واذا كان $a \neq 0$ و $b^2 - 4ac < 0$ فإنه ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ

1 $2x^2 - 3x = 5$

أكتبُ المُعادلةَ بالصورةِ القياسيَّةِ

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$

أجد قِيَم المعاملات:

$\Rightarrow a = 2, b = -3, c = -5$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

أطبِّقُ القانونَ العامَّ.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{49}}{2(2)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{3 \pm 7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3-7}{4} \Rightarrow x = -1$$

$$\text{or} \Rightarrow x = \frac{3+7}{4} \Rightarrow x = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ هُما $-1, \frac{5}{2}$

2 $x^2 + 4x - 12 = 0$

أجد قِيَم المعاملات:

$\Rightarrow a = 1, b = 4, c = -12$

$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 64$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

أطبِّقُ القانونَ العامَّ.

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4-8}{2} = -6$$

$$\Rightarrow x = \frac{-4+8}{2} = 2$$

إذن، حلّا المعادلة هما: $x = -6, x = 2$

المُعادلـةُ التربيعيَّـةُ

c حلُّ المعادلة التربيعية بالقانون العام

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بالقانونِ العامِّ

2 $x^2 - 2x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \;= (-2)^2 - 4(1)(1) \;= 0$$

بما أنَّ $\Delta = 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

$$x = \frac{-b}{2a} \;=\; \frac{-(-2)}{2} \;=\; 1$$

3 $x^2 - x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \;= (-1)^2 - 4(1)(1) = -3$$

بما أنَّ $\Delta < 0$، إذنْ ليسَ للمُعادلةِ أيُّ حلٍّ حقيقيٍّ.

1 $2x^2 - 15x + 19 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac \;= (-15)^2 - 4(2)(19) = 73$$

بما أنَّ $\Delta > 0$، إذنْ للمُعادلةِ حلّانِ حقيقيّانِ مختلفانِ.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \;= \frac{-(-15) \pm \sqrt{73}}{2(2)}$$

$$= \frac{15 \pm \sqrt{73}}{4}$$

$$x = \frac{15 - \sqrt{73}}{4} \quad \text{or} \quad x = \frac{15 + \sqrt{73}}{4}$$

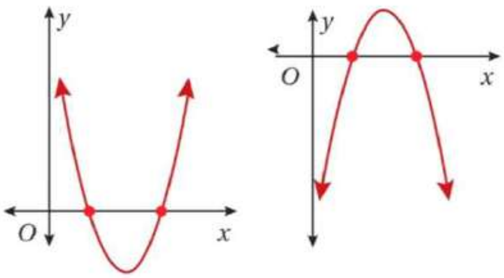
إذنْ، جذرا المُعادلةِ $\frac{15 + \sqrt{73}}{4}, \frac{15 - \sqrt{73}}{4}$

D حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا

قِيَمُ x التـي يقطع عندها منحنـى الاقترانِ المُرتبـطِ المحورَ x إن وجِدَتْ هي أصفارُ الاقترانِ المُرتبطِ، التي تُعَدُّ حلولَ المُعادلةِ.

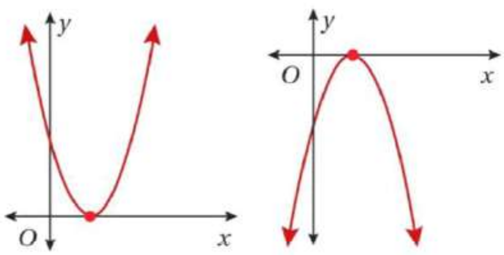
حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا: حلّان حقيقيانِ مختلفانِ

يكـونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلّانِ حقيقيانِ، إذا قطعَ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ المحورَ x في نقطتَيْنِ، كما في الشكلِ المُجاورِ.



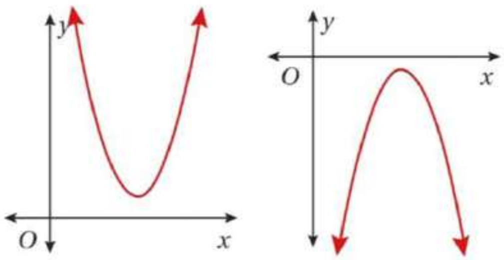
حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا: حلٌّ حقيقيٌّ واحدٌ.

يكـون للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقـيٌّ واحدٌ إذا قطعَ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ المحـورَ x في نقطةٍ واحدةٍ فقط، كما في الشكلِ المُجاورِ.



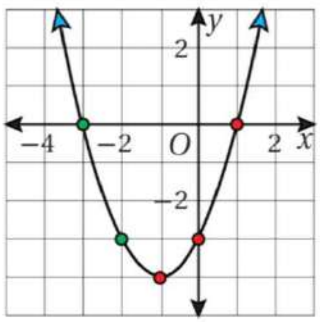
حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا: لا توجدُ حلولٌ حقيقيَّةٌ.

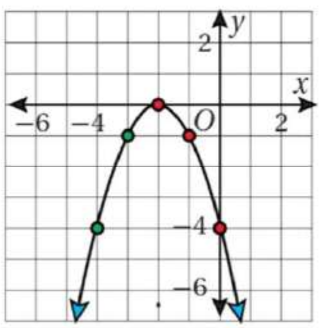
لا يكـونُ للمُعادلةِ التربيعيَّةِ حلٌّ حقيقـيٌّ إذا لمْ يقطَعْ مُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ المُرتبطِ بالمُعادلةِ التربيعيَّةِ المحورَ x، كما في الشكلِ المُجاورِ.

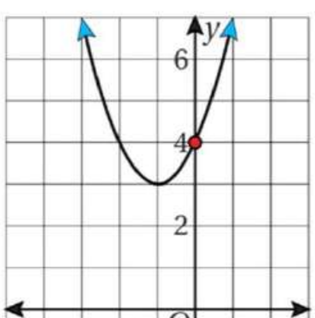


D حلُّ المُعادلة التربيعيَّة بيانيًّا

قِيَمَ x التـي يقطع عندها منحنـى الاقترانِ المُرتبطِ المحورَ x إن وجِدَتْ هي أصفار الاقترانِ المُرتبطِ، التي تعَدُّ حلولَ المُعادلة







E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

لإكمالِ مُرَبَّعِ أيِّ مقدارٍ تربيعيٍّ على الصورةِ $x^2 + bx$، أَتَّبعُ الخُطواتِ الآتيةَ:

أجد نصف b ⟸ أُربّع الناتجَ ⟸ أضيف الناتجَ إلى $x^2 + bx$

$$x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2$$

مثال أجعلُ كلَّ مقدارٍ ممّا يأتي مُرَبَّعًا كاملًا، ثمَّ أحلّلُ المُرَبَّعَ الكاملَ ثُلاثيَّ الحدودِ الناتجَ:

1 $x^2 + 12x$

أجد نصف b ⟸ أُربّع الناتجَ ⟸ أضيف الناتجَ إلى $x^2 + bx$

$$\frac{12}{2} = 6 \Rightarrow 6^2 = 36 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 \Rightarrow x^2 + 12x + 36 = (x+6)^2$$

2 $x^2 - 14x$

أجد نصف b ⟸ أُربّع الناتجَ ⟸ أضيف الناتجَ إلى $x^2 + bx$

$$\frac{14}{2} = 7 \Rightarrow 7^2 = 49 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 \Rightarrow x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$$

حلُّ المُعادلات التربيعيَّة علَى الصورة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ

يمكِنني استعمال إكمالِ المُرَبَّع لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$ وذلكَ يتطلَّب فصل المقدارِ $x^2 + bx$ في الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أكمِل المُرَبَّعَ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

1 $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 12 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 16 \Rightarrow x + 2 = \pm 4 \Rightarrow x = -2 \pm 4$$

$$\Rightarrow x = -2 + 4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{or } x = -2 - 4 \Rightarrow x = -6$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $2, -6$

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

حلُّ المُعادلات التربيعيَّة علىٰ الصورة $x^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ

يمكِنني استعمال إكمالِ المُرَبَّع لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $x^2 + bx + c = 0$

وذلكَ يتطلَّب فصل المقدارِ $x^2 + bx$ في الطرفِ الأيسرِ أوَّلًا، ثمَّ أكمِل المُرَبَّعَ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

1) $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x = 12 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = 16 \Rightarrow x + 2 = \pm 4 \Rightarrow x = -2 \pm 4$$

$$\Rightarrow x = -2+4 \Rightarrow x = 2$$

$$\text{or } x = -2 - 4 \Rightarrow x = -6$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $2, -6$

2) $x^2 + 4x - 12 = 0$

$$x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = 1 \Rightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{13}{4} \Rightarrow x - \frac{3}{2} = \pm \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x \approx 3.3$$

$$\text{or } x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x \approx -0.3$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ -0.3 ، 0.3

E حلُّ المُعادلات التربيعيَّة بإكمال المُرَبَّع

حلُّ المُعادلات التربيعيَّة على الصورة $ax^2 + bx + c = 0$ بإكمالِ المُرَبَّعِ.

لحـلِّ المُعادلةِ التربيعيَّةِ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$؛ حيثُ $a \neq 1$، أقسِـمُ كلَّ حدٍّ في المُعادلـةِ على a، ثمَّ أفصِلُ الحدَّيْنِ اللذَيْنِ يحتويانِ على x^2 و x في الطرفِ الأيسـرِ أوَّلًا، ثمَّ أُكمِلُ المُرَبَّعَ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ بإكمالِ المُرَبَّعِ

1) $2x^2 - 12x + 8 = 0$

$$2x^2 - 12x + 8 = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x + 4 = 0 \Longrightarrow x^2 - 6x = -4$$

$$\Longrightarrow x^2 - 6x + 9 = -4 + 9 \Longrightarrow (x-3)^2 = 5$$

$$\Longrightarrow x - 3 = \pm\sqrt{5} \Longrightarrow x = 3 \pm \sqrt{5}$$

$$\Longrightarrow x = 3 + \sqrt{5} \text{ or } x = 3 - \sqrt{5}$$

إذنْ، جذرا المُعادلةِ $3 - \sqrt{5}, 3 + \sqrt{5}$

2) $3x^2 + 6x + 15 = 0$

$$3x^2 + 6x + 15 = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x + 5 = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x = -5$$

$$\Longrightarrow x^2 + 2x + 1 = -5 \Longrightarrow (x + 1)^2 = -4$$

بما أنَّهُ لا توجدُ أعدادٌ حقيقيَّةٌ مُرَبَّعاتُها سالبةٌ، فالمُعادلةُ ليسَ لها حُلولٌ حقيقيَّةٌ.

مقارنة بين طرائق حل المعادلات التربيعية

الطريقةُ	الإيجابياتُ	السلبياتُ
التمثيلُ البيانيُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ. • يمكنُ بسهولةٍ تحديدُ الحُلولِ مِنَ التمثيلِ.	• قد لا تُعطي حلولًا دقيقةً.
التحليلُ إلى العواملِ	• مِنْ أفضلِ الطرائقِ لتجرِبَتِها أوَّلًا. • تُعطي إجابةً مباشرةً إذا كانَتِ المُعادلةُ قابلةً للتحليلِ أو كانَ الحدُّ الثابتُ صِفرًا.	• ليستْ جميعُ المُعادلاتِ التربيعيَّةِ قابلةً للتحليلِ.
استعمالُ الجُذورِ التربيعيَّةِ	• تُستعمَلُ لحلِّ المُعادلاتِ على الصورةِ $(x+a)^2 = c$، حيثُ $c \geq 0$	• لا تُستعمَلُ إذا كانَ الحدُّ bx موجودًا.
إكمالُ المُرَبَّعِ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$. • مِنَ الأسهلِ استعمالُها إذا كانَ $a = 1$، وَb عددًا زوجيًّا.	• في بعضِ الأحيانِ تكونُ الحساباتُ مُعَقَّدَةً.
القانونُ العامُّ	• يمكنُ استعمالُها لحلِّ أيِّ مُعادلةٍ تربيعيَّةٍ على الصورةِ $ax^2 + bx + c = 0$. • تُعطي حُلولًا دقيقةً.	• قد تستغرقُ وقتًا أطولَ مِنْ باقي الطرائقِ لإجراءِ الحساباتِ.

5 طرائق حل المعادلات التكعيبية البسيطة (من الدرجة الثالثة)

تحليلُ مجموع مُكَعَّبَيْن أو تحليلُ الفرق بينَهُما، وحلُّ معادلتهما

تحليلُ مجموعِ مُكَعَّبَيْنِ	تحليلُ الفرقِ بينَ مكعّبَين
$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$x^3 + 27 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$	$x^3 - 64 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$

يمكــنُ حلُّ مُعادلاتٍ تحتوي على مجمــوعِ مكعّبَينِ أوْ على الفرقِ بينَهُما باســتعمالِ طرائقِ التحليلِ الخاصَّةِ بكلٍّ منهما وخاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow x^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

or $\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلة

2 $8x^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow 8x^3 + 1 = 0$

$\Rightarrow (2x)^3 + 1^3 = 0$

$\Rightarrow (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

or $\Rightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلة

3 $x^3 - 8 = 0$

$\Rightarrow x^3 - 8 = 0$

$\Rightarrow (x-2)(x^2 + 8x + 4) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

or $\Rightarrow x^2 + 8x + 4 = 0 \Rightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلة

4 $8x^3 - 27 = 0$

$\Rightarrow 8x^3 - 27 = 0$

$\Rightarrow (2x)^3 - 3^3 = 0$

$\Rightarrow (2x-3)(4x^2 + 24x + 9) = 0$

$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

or $\Rightarrow 4x^2 + 24x + 9 = 0 \Rightarrow$ لا يوجدُ حل حقيقيٌّ للمُعادلة

المعادلات من الدرجة 3 فما فوق نستخدم نظرية الاصفار النسبية في تحليلها
وهـذه النظرية سوف ندرسها قريبـا ان شـاء الله

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

1 حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترَك

2 حلُّ المُعادلات بالتجميع (اربعة حدود)

3 تحليلُ مُعادلات على الصورة التربيعيَّة (شبه التربيعية)

1 حلُّ المُعادلات بإخراج العامل المُشترَك

يمكنُ الإفادةُ مِنْ إخراج العاملِ المُشتَرَكِ في تبسيطِ وحلِّ مُعادلاتٍ أُسُّ المُتغيِّرِ فيها عددٌ صحيحٌ أكبرُ مِنْ 2.

مثال أحلُّ كُلًّا مِنَ المُعادلاتِ الآتيةِ:

1 $x^3 + 4x^2 = 5x$

$\Rightarrow x^3 + 4x^2 = 5x \Rightarrow x^3 + 4x^2 - 5x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 + 4x - 5) = 0 \Rightarrow x(x+5)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x+5 = 0 \Rightarrow x = -5$

or $\Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-5, 0, 1$

2 $2x^3 = 18x$

$\Rightarrow 2x^3 = 18x \Rightarrow 2x^3 - 18x = 0$

$\Rightarrow 2x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow 2x(x-3)(x+3) = 0$

$\Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x-3 = 0 \Rightarrow x = 3$

or $\Rightarrow x+3=0 \Rightarrow x = -3$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-3, 0, 3$

---

3 $x^4 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x^4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2(x-1)(x+1) = 0$

$\Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

or $\Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$

or $\Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $-1, 0, 1$

4 $3x^3 + x = 4x^2$

$\Rightarrow 3x^3 - 4x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x(3x-1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow 3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

or $\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

إذنْ، جذورُ المُعادلةِ $\frac{1}{3}, 1, 0$

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

2 حلُّ المُعادلات بالتجميع يمكنُ حلُّ المُعادلاتِ التي تحتوي على أربعةِ حُدودٍ جبريَّةٍ أوْ أكثرَ باستعمالِ طريقةِ التجميع، وذلكَ بتجميعِ الحُدودِ التي تحتوي على عواملَ مُشــتركَةٍ بينها، ثمَّ استعمالُ خاصيَّةِ الضَّربِ الصِّفريِّ لحلِّ المُعادلةِ.

مثال أَحُلُّ كُلًّا منَ المُعادلاتِ الآتية:

1 $\mathbf{x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0}$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + 9x - 18 = 0 \quad \Rightarrow (x^3 - 2x^2) + (9x - 18) = 0$

$\Rightarrow x^2(x-2) + 9(x-2) = 0 \quad \Rightarrow (x-2)(x^2+9) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

or $\Rightarrow x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$ لا يوجدُ حلٌّ حقيقيٌّ للمُعادلةِ

للمعادلة الأصليَّةِ جذرًا وحيدا هو 2

---

2 $\mathbf{4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0}$

$\Rightarrow 4x^3 + 8x^2 - 5x - 10 = 0 \quad \Rightarrow (4x^3 + 8x^2) + (-5x - 10) = 0$

$\Rightarrow 4x^2(x+2) - 5(x+2) = 0 \quad \Rightarrow (x+2)(4x^2 - 5) = 0$

$\Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

or $\Rightarrow 4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

إذن، جذور المعادلة $-2, -\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}$

6 حلُّ مُعادلات خاصَّة

3 تحليلُ مُعادلات على الصورة التربيعيَّة

يُسَمّى المقدارُ الجبريُّ المكتوبُ على الصورةِ $au^2 + bu + c$؛ حيثُ u مقدارٌ جبريٌّ، مقدارًا على **الصورةِ التربيعيَّةِ**

ويمكنُ اســتعمالُ طرائقِ التحليل التي تعلَّمتُها سابقًا في حلِّ مُعادلاتٍ تحوي مقاديرَ على الصورةِ التربيعيَّةِ.

مثال أحلُّ المُعادلةَ: $x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

الطريقةُ 2: التعويضُ

$\Rightarrow u = x^3$ أفترضُ أنَّ

$\Rightarrow x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow (x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow u^2 - 3u - 40 = 0$

$\Rightarrow (u-8)(u+5) = 0$

$\Rightarrow u - 8 = 0 \Rightarrow u = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = 2$

or $\Rightarrow u + 5 = 0 \Rightarrow u = -5 \Rightarrow x^3 = -5 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-5}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

الطريقةُ 1: التحليلُ

$\Rightarrow x^6 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow (x^3)^2 - 3x^3 - 40 = 0$

$\Rightarrow (x^3 - 8)(x^3 + 5) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$

or $\Rightarrow x^3 + 5 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-5}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $2, \sqrt[3]{-5}$

مثال أحلُّ المُعادلةَ: $x^{10} - 2x^5 - 24 = 0$

الطريقةُ 2: التعويضُ

$\Rightarrow u = x^{10}$ أفترضُ أنَّ

$\Rightarrow x^{10} - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x^5)^2 - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow u^2 - 2u - 24 = 0$

$\Rightarrow (u-6)(u+4) = 0$

$\Rightarrow u - 6 = 0 \Rightarrow u = 6 \Rightarrow x^3 = 6 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$

or $\Rightarrow u + 4 = 0 \Rightarrow u = -4 \Rightarrow x^3 = -4 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $\sqrt[3]{-4}$ ، $\sqrt[3]{6}$

الطريقةُ 1: التحليلُ

$\Rightarrow x^{10} - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x^5)^2 - 2x^5 - 24 = 0$

$\Rightarrow (x^3 - 6)(x^3 + 4) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 6 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{6}$

or $\Rightarrow x^3 + 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-4}$

إذنْ، جذرا المُعادلة $\sqrt[3]{-4}$ ، $\sqrt[3]{6}$

7 تبسيط المقادير النسبية

---

1 تبسيط المقادير النسبية

هو تحويل الكسر الجبري إلى صورة مختصرة دون تغيير قيمته، عن طريق تحليل البسط والمقام وحذف العوامل المشتركة، مع مراعاة القيود على المتغيرات

المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ هوَ مقدارٌ جبريٌّ يُمكِنُ كتابتُهُ في صورةِ كسرٍ بسطُهُ ومقامُهُ مقدارانِ جبريانِ، ومنْ أمثلتِهِ:

$$\frac{6}{x} \;,\; \frac{2y+1}{y^2-3y+2} \;,\; \frac{r^3+1}{r-4}$$

يكونُ المقدارُ الجبريُّ النسبيُّ في أبسطِ صورةٍ إذا كانَ العددُ 1 هوَ العاملَ المشتركَ الأكبرَ لكلٍّ منْ بسطِهِ ومقامِهِ

خطوات التبسيط : 1 تحليل البسط إلى عوامله 2 تحليل المقام إلى عوامله

3 حذف العوامل المشتركة بين البسط والمقام

4 كتابة الكسر في أبسط صورة

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1 $$\frac{2x-10}{2x^2-11x+5} = \frac{2(x-5)}{(2x-1)(x-5)} = \frac{2\cancel{(x-5)}}{(2x-1)\cancel{(x-5)}} = \frac{2}{2x-1}$$

2 $$\frac{x+4}{x^2-16}$$

3 $$\frac{x^2-4x-5}{x+1}$$

7 تبسيط المقادير النسبية

2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

هو عملية دمج كسرين جبريين أو أكثر في كسر نسبي واحد، عن طريق توحيد المقامات وقد يُتبع ذلك بتبسيط الناتج إن أمكن

خطوات الجمع (الطرح):

⟸ تحليل مقامات الكسور (إن أمكن) لتحديد المضاعف المشترك الأصغر للمقامات (LCM)

⟸ توحيد المقامات بضرب كل كسر بما يُكمل مقامه إلى المقام المشترك

⟸ جمع (طرح) البسوط مع الحفاظ على المقام الموحد

⟸ تبسيط الكسر الناتج (إن وُجدت عوامل مشتركة)

عند جمع مقدارينِ جبريينِ نسبيينِ لهُما المقامُ نفسُهُ أوْ طرحِهِما، يُجمَعُ البسطانِ أوْ يُطرَحانِ ويبقى المقامُ نفسُهُ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{3x}{y+2}+\frac{x}{y+2}=\frac{3x+x}{y+2}=\frac{4x}{y+2}$

2) $\frac{2}{x-5}+\frac{3}{x-5}=\frac{2+3}{x-5}=\frac{5}{x-5}$

3) $\frac{4}{x+7}-\frac{3}{x+7}=\frac{4-3}{x+7}=\frac{1}{x+7}$

7 تبسيط المقادير النسبية

2 جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{2}{x+6}+\frac{3}{x-5}=\frac{2}{x+6}\left(\frac{x-5}{x-5}\right)+\frac{3}{x-5}\left(\frac{x+6}{x+6}\right)$

$$=\frac{2(x-5)}{(x+6)(x-5)}+\frac{3(x+6)}{(x-5)(x+6)} \quad =\frac{2(x-5)+3(x+6)}{(x+6)(x-5)}$$

$$=\frac{2x-10+3x+18}{x^2-5x+6x-30} \quad =\frac{5x+8}{x^2+x-30}$$

2) $\frac{2}{x+1}+\frac{5}{x-3}$

3) $\frac{4}{x-3}-\frac{5}{x+2}$

7 تبسيط المقادير النسبية

3 ضرب المقادير الجبرية النسبية

لضربِ مقدارينِ جبريينِ نســبيينِ، يُضرَبُ البســطُ في البسطِ، ثمَّ يُضرَبُ المقامُ في المقامِ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{3x}{x-1} \times \frac{x+4}{6x}$

2) $\frac{4x}{y} \times \frac{5}{y+1} = \frac{4x \times 5}{y(y+1)} = \frac{40x}{y^2+y}$

4 قسمةُ المقادير الجبرية النسبية

لقسمةِ مقدارٍ جبريٍّ نسبيٍّ على آخرَ، يُضرَبُ في النظيرِ الضربيِّ للمقسومِ عليْهِ.

مثال أكتبُ كُلًّا ممّا يأتي في أبسطِ صورةٍ:

1) $\frac{5x+2}{6x} \div \frac{x+1}{2x} = \frac{5x+2}{6x} \times \frac{2x}{x+1} = \frac{2x(5x+2)}{6x(x+1)} = \frac{5x+2}{3(x+1)}$

2) $\frac{4x}{y} \div \frac{5}{y+1} = \frac{4x}{y} \times \frac{y+1}{5} = \frac{4x(y+1)}{5y}$

3) $\frac{x}{x+1} \div \frac{x+4}{2x+2}$