

مهارات التفكير العليا

الضرب القياسي

(37) تبرير: إذا كانت $A(3, -2, 4), B(1, -5, 9), C(-4, 5, -1)$ ، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المار بالنقطة A والنقطة B ، وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D ؟ أبرر إجابتني.

بما أن قائمة $\angle CDA$ ، فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C ، على $AB \leftrightarrow$ ، ويمكن إيجاد إحداثياتها كما يأتي:

$$\overrightarrow{AB} = \langle -2, -3, 5 \rangle$$

معادلة المستقيم $AB \leftrightarrow$ هي: $\overrightarrow{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 5 \rangle$

بما أن النقطة D تقع على $AB \leftrightarrow$ فإن:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \langle 3-2t, -2-3t, 4+5t \rangle \\ \overrightarrow{CD} &= \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+5t+1 \rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+5t \rangle \\ \overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} &\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -2(7-2t) - 3(-7-3t) + 5(5+5t) = 0 \\ &\Rightarrow t = -1619 \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3-2(-1619), -2-3(-1619), 4+5(-1619) \rangle = \langle 8919, 1019, -419 \rangle \end{aligned}$$

إذن، إحداثيات D هي: $(8919, 1019, -419)$

تحذ: إذا كانت: $\overrightarrow{r} = (-8161) + t(7-3-6)$

معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت $\overrightarrow{r} = (-1031-26) + u(3-67)$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، وتقاطع هذان المستقيمان في النقطة P ، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم l_1 ، حيث: $t=3$ ، والنقطة R تقع على المستقيم l_2 ، حيث: $PQ=PR, u>3$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(38) إذا كان $m\angle RPQ = \theta$ ، فأبين أن: $\theta = -394\cos$.

الزاوية RPQ هي الزاوية المحصورة بين المستقيمين l_1, l_2 ، ونساوي الزاوية بين اتجاهيهما.

اتجاه l_1 هو: $\overrightarrow{u} = (7-3-6)$ ، واتجاه l_2 هو: $\overrightarrow{v} = (3-67)$

$$\theta = \vec{u} \cdot \vec{v} / |\vec{u}| |\vec{v}| = 21 + 18 - 42 / 9 + 36 \times 9 + 36 + 49 = \cos \angle RPQ = \theta \Rightarrow \cos \theta = -394 / 94 = -394$$

(39) أبين أن مساحة المثلث PQR هي 28827 وحدة مربعة.

لإيجاد مساحة PQR يتعين معرفة متجهين يمثلان اثنين من أضلاعه، ولذا تلزمنا معرفة إحداثيات رؤوسه الرأس P هو نقطة تقاطع المستقيمين l_1, l_2 ، ونجدها بمساواة $\vec{r}$ في المعادلتين ومساواة الإحداثيات المتناظرة:

$$\begin{aligned} 8 + 7t, 16 - 3t, 1 - 6t &= (-10 + 3u, 31 - 6u, -26 + 7u) \Rightarrow -8 + 7t = -10 + 3u \Rightarrow 7t - 3u = -2 \dots \dots (1) \\ 16 - 3t &= 31 - 6u \Rightarrow -3t + 6u = 15 \dots \dots (2) \\ 1 - 6t &= -26 + 7u \Rightarrow 7u + 6t = 27 \dots \dots (3) \end{aligned}$$

بحل النظام نجد أن: $t=1, u=3$

لإيجاد إحداثيات P تعوض $t=1$ في معادلة l_1 :

$$(\vec{r} = (-8 + 7, 16 - 3, 1 - 6) = (-1, 13, -5) \Rightarrow P(-1, 13, -5)$$

نجد إحداثيات Q بتعويض $t=3$ في معادلة l_1 :

$$(\vec{r} = (-8 + 21, 16 - 9, 1 - 18) \Rightarrow Q(13, 7, -17)$$

النقطة R تقع على المستقيم l_2 ، فمتجه موقعها هو: $(-10 + 3u, 31 - 6u, -26 + 7u)$

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= (13, 7, -17) - (-1, 13, -5) = (14, -6, -12) \\ \vec{PR} &= (-10 + 3u, 31 - 6u, -26 + 7u) - (-1, 13, -5) = (-9 + 3u, 18 - 6u, -21 + 7u) \\ \vec{PQ} &= \vec{PR} \Rightarrow |\vec{PQ}| = |\vec{PR}| \Rightarrow (-9 + 3u)^2 + (18 - 6u)^2 + (-21 + 7u)^2 = 14^2 + (-6)^2 + (-12)^2 \\ 9u^2 - 54u + 81 + 36u^2 - 216u + 324 + 49u^2 - 245u + 441 &= 14^2 + (-6)^2 + (-12)^2 \\ 94u^2 - 495u + 846 &= 364 \\ 94u^2 - 495u + 482 &= 0 \Rightarrow u = 5 \text{ أو } u = 1 \end{aligned}$$

لكن $u > 3$ ، فإذاً $u=5$ وتكون $R(5, 1, 9)$

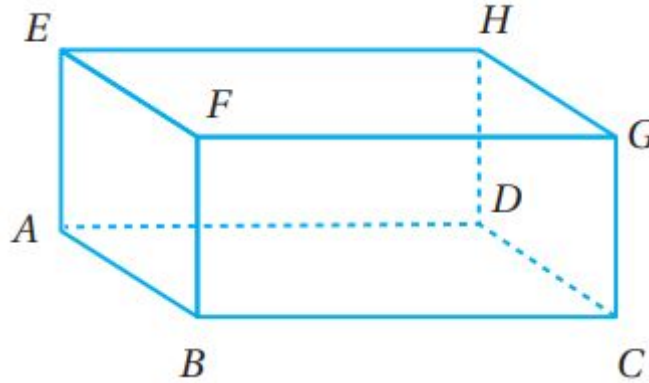
لدينا: $(R(5, 1, 9), Q(13, 7, -17), P(-1, 13, -5))$

$$\begin{aligned} \theta(PQR) &= \frac{1}{2} |\vec{PQ}| \times |\vec{PR}| \sin \angle PQR = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + (-6)^2 + (-12)^2} \times \sqrt{(-9 + 3u)^2 + (18 - 6u)^2 + (-21 + 7u)^2} \sin \theta \\ \theta(PQR) &= \frac{1}{2} \times 376 \times 22388880 = 1 - 9942 = 88278836 \text{ Area} \sin \theta \end{aligned}$$

تحد: رسم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها

على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\vec{AB} = (2\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k}), \vec{AD} = (-10\hat{i} + 10\hat{j} - 5\hat{k}), \vec{AE} = (-6\hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k})$$



(40) إذا كانت $B(8, 3, -2)$ ، فأجد إحداثيات النقطة H.

لتكن $H(x, y, z)$

$$\begin{aligned} \vec{BH} &= \vec{BA} + \vec{AD} + \vec{DH} \quad (\vec{DH} = \vec{AE}) \\ (x-8, y-3, z+2) &= (-2, -4, -4) + (-10, 10, -5) + (-6, -3, 6) \\ (x-8, y-3, z+2) &= (-18, 3, -3) \\ x-8 &= -18 \Rightarrow x = -10 \\ y-3 &= 3 \Rightarrow y = 6 \\ z+2 &= -3 \Rightarrow z = -5 \Rightarrow H(-10, 6, -5) \end{aligned}$$

ملحوظة: توجد طرق أخرى للحل، منها التدرج بإيجاد إحداثيات A ثم E ثم H

(41) أجد قياس الزاوية GAC مقرباً إلى أقرب عشر درجة.

يمكن بالطرق الواردة في حل السؤال السابق إيجاد إحداثيات كل من C, G وإكمال الحل لحساب قياس الزاوية المطلوبة تقليدياً، هنا سنستفيد من حقيقة أن GC و AC متعامدان (أي أن $\vec{GC} \cdot \vec{AC} = 0$)

ليكن $\angle GAC = \theta$

$$\begin{aligned} \theta &= |\angle GAC| = |\angle EAB| = |\angle EAD| = |\angle EAB + \angle BAD| = |(-6, -3, 6) \cdot (2, 4, 4) + (-10, 10, -5) \cdot (-8, 14, -1)| \\ &= |(-6, -3, 6) \cdot (-8, 14, -1)| = 36 + 9 + 3664 + 196 + 1 = 81261 = 9329 \\ &\circ 329 \approx 29.1 = 329 \Rightarrow \theta = \tan^{-1} 1 \end{aligned}$$

(42) إذا كان X نقطة منتصف الضلع EF، فأجد جيب تمام الزاوية DXC.

$$\begin{aligned} \vec{XD} &= \vec{XE} + \vec{EA} + \vec{AD} = 12\vec{FE} - \vec{AE} + \vec{AD} = -12\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD} = \langle -1, -2, -2 \rangle - \langle -6, -3, 6 \rangle + \langle -10, 10, -5 \rangle = \langle -5, 11, -13 \rangle \Rightarrow |\vec{XD}| = \sqrt{25 + 121 + 169} = 315 \\ \vec{XC} &= \vec{XF} + \vec{FB} + \vec{BC} = 12\vec{EF} - \vec{AE} + \vec{AD} = 12\vec{AB} - \vec{AE} + \vec{AD} = \langle 1, 2, 2 \rangle - \langle -6, -3, 6 \rangle + \langle -10, 10, -5 \rangle = \langle -3, 15, -9 \rangle \Rightarrow |\vec{XC}| = \sqrt{9 + 225 + 81} = 315 \\ \vec{XD} \cdot \vec{XC} &= -5(-3) + 11(15) - 13(-9) = 297 \cos \theta = \frac{\vec{XD} \cdot \vec{XC}}{|\vec{XD}| |\vec{XC}|} = \frac{297}{315 \cdot 315} = \frac{33}{35} \end{aligned}$$