

أتدرب وأحل المسائل

المعادلات التفاضلية

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يأتي:

$$(y=x; xy'-y=0) \quad (1)$$

$$y'=12x \quad xy'-y=x12x-x=12x-x=-12x \neq 0$$

إذن، $y=x$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'-y=0$

$$(x-5x+7; y''-1x=0) \quad (2) \quad y=x \ln$$

$$x-4y''=1 \quad xy''-1x=1x-1x=0 \quad x-5=\ln y' = x(1x) + \ln$$

إذن، $x-5x+7y=x \ln$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y''-1x=0$

$$(x; y'+y^2=1) \quad (3) \quad y=\tan$$

$$x \neq 1 \quad x=1+2 \tan^2 x + \tan^2 x y' + y^2 = \sec^2 y' = \sec^2$$

إذن، $xy=\tan$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $y'+y^2=1$

$$(y=e^x+3x e^x; y''-2y'+y=0) \quad (4)$$

$$y'=e^x+3x e^x+3e^x=4e^x+3x e^x \quad y''=4e^x+3x e^x+3e^x=7e^x+3x e^x$$

$$y''-2y'+y=7e^x+3x e^x-8e^x-6x e^x+e^x+3x e^x=0$$

إذن، $y=e^x+3x e^x$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y''-2y'+y=0$

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dydx=3xy) \quad (5)$$

$$dydx=3xy \quad dy=3xdx \Rightarrow \int dy = \int 3xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$(dydx+3xy^2=0) \quad (6)$$

$$dydx=-3xy^2 \Rightarrow y^2 dy = -3xdx \Rightarrow \int y^2 dy = \int -3xdx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\frac{3}{2}x^2 + C$$

$$(y (7x \sin y dx = \cos$$

$$y dy = \int \csc x dx \int \csc y dy = \int \cos x dx \Rightarrow \int \csc y = \cos y dx dy \sin x \sin y dx = \cos y dy = - \int -(\csc^2 y + \cot y \csc y \cot y + \csc y dy = \int \csc^2 y + \cot y \csc y + \cot x \csc x + C y = \sin y + \cot |\csc y| \Rightarrow -\ln y + \cot |\csc y dy = -\ln y + \cot y) \csc y \cot y + \csc$$

$$(dy dx = x(x^2 + 1)^2 (8$$

$$dy = x(x^2 + 1)^2 dx \int dy = \int x(x^2 + 1)^2 dx u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = du 2x \Rightarrow \int x(x^2 + 1)^2 dx = \int x u^2 du 2x = 12 \int 1 u^2 du = -12 u + C = -12(x^2 + 1) + C \Rightarrow \int dy = \int x(x^2 + 1)^2 dx \Rightarrow y = -12(x^2 + 1) + C$$

$$(dy dx = x e^x + y (9$$

$$dy dx = x e^x e^y \Rightarrow dy e^y = x e^x dx \int dy e^y = \int x e^x dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int x e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = u = x dv = e^x dx du = dx v = e^x \Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

نستخدم الأجزاء

$$= x e^x - e^x + C \Rightarrow -e^{-y} = x e^x - e^x + C$$

$$(e^{-1/x} dy dx = x - 2y^2 (10$$

$$dy^2 = x - 2e^{-1/x} dx = e^{1/x} x^2 dx \int y - 2 dy = \int e^{1/x} x^2 dx \Rightarrow -y - 1 = \int e^{1/x} x^2 dx u = 1/x \Rightarrow du dx = -1/x^2 \Rightarrow dx = -x^2 du \Rightarrow \int e^{1/x} x^2 dx = \int e^u x^2 x - x$$

نعويض

$$2 du = \int -e^u du = -e^u + C = -e^{1/x} + C - y - 1 = \int e^{1/x} x^2 dx \Rightarrow 1/y = e^{1/x} + C$$

$$(dy dx = x y x - 3 (11$$

$$|x - 3| + C |y| = x + 3 \ln dy y = x x - 3 dx \int dy y = \int x x - 3 dx \int dy y = \int (1 + 3x - 3) dx \ln$$

$$(y x^3 + 2 (12 dy dx = 3x^2 \sin^2$$

$$y dy = \int 3x^2 x^3 + 2 y = \int 3x^2 (x^3 + 2) dx \int \csc^2 y = 3x^2 (x^3 + 2) dx \int dy \sin^2 dy \sin^2 |x^3 + 2| + C y = \ln x - \cot$$

$$(x (13 dy dx = y^3 \ln$$

$$x x dv = dx du = dx x v = x \int \ln u = \ln$$

نستخدم الأجزاء

$$x dx x dx \int dy y^3 = \int \ln dy y^3 = \ln x - x + C x dx \Rightarrow -12y - 2 = x \ln x - x + C \Rightarrow \int y - 3 dy = \int \ln x - \int x dx x = x \ln x = x \ln$$

$$(dydx=2x^3(y^2-1) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 1y^2-1 &= 1(y-1) \text{ نستخدم الكسور الجزئية } dy y^2-1 = 2x^3 dx \int dy y^2-1 = \int 2x^3 dx \\ (y+1) &= Ay-1+By+1 A(y+1)+B(y-1)=1 y=1 \Rightarrow A=1 y=-1 \Rightarrow B=-1 \Rightarrow 1 \\ y^2-1 &= 12y-1+-12y+1 \Rightarrow \int dy y^2-1 = \int 2x^3 dx \Rightarrow \int (12y-1+-12y+1) dy = \\ |y+1| &= 12x^4+C |y-1| -12 \ln |2x^3 dx| \Rightarrow 12 \ln \end{aligned}$$

$$(x \quad (15) x \cos^2 y dy dx = \sin^3$$

$$\begin{aligned} x \Rightarrow dx = u = \cos \text{ نستخدم التعويض } x dx x \cos^2 x dx \int y dy = \int \sin^3 x \cos^2 y dy = \sin^3 \\ x u^2 du = \int (-1 + \cos x = \int -\sin^2 x u^2 du - \sin x dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \int \sin^3 du - \sin \\ x - 1 x) u^2 du = \int (-1 + u^2) u^2 du = \int (u^4 - u^2) du = 15u^5 - 13u^3 + C = 15 \cos^5 2 \\ x + C x - 13 \cos^3 x dx \Rightarrow 12y^2 = 15 \cos^5 x \cos^2 x + C \Rightarrow \int y dy = \int \sin^3 3 \cos^3 \end{aligned}$$

$$(dydx=xy \quad (16)$$

$$dy y = x dx \int dy y = \int x dx \int y - 12 dy = \int x^2 dx 2y^{12} = 23x^3 + C$$

$$(x \quad (17) dy dx = y \ln$$

$$\begin{aligned} x dv = u = \ln \text{ نستخدم الأجزاء } x dx x^2 dx \int dy y = \int 12 \ln x^2 dx \int dy y = \int \ln dy y = \ln \\ x - 1 x dx = 12 x \ln x - x + C \Rightarrow \int 12 \ln x - \int x dx x = x \ln x dx = x \ln x du = dx x v = x \int \ln \\ x - 12 x + C |y| = 12 x \ln x dx \Rightarrow \ln^2 x + C \int dy y = \int 12 \ln \end{aligned}$$

$$(2x+1)(x+2) dy dx = -3(y-2) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{الكسور الجزئية } (2x+1)(x+2) dy = -3(y-2) dx \int -13 dy y - 2 = \int dx (2x+1)(x+2) \\ 2x+1)(x+2) = A2x+1+Bx+2 A(x+2)+B(2x+1)=1 x=-12 \Rightarrow 1 \text{ نستخدم } \\ A=23 x=-2 \Rightarrow B=-13 \Rightarrow 1(2x+1)(x+2) = 232x+1+-13x+2 \Rightarrow \int -13 dy y - \\ |y-x+2| + C \Rightarrow -\ln |2x+1| - 13 \ln |y-2| = 13 \ln 2 = \int dx (2x+1)(x+2) \Rightarrow -13 \ln \\ |2x+1 x+2| + C |y-2| = \ln |x+2| + C \Rightarrow -\ln |2x+1| - \ln 2 = \ln \end{aligned}$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dydx=y^{24}-x; y(1)=2 \quad (19)$$

$$dydx = y^2 4 - x \quad dy y^2 = 4 - x \quad dx \int dy y^2 = \int 4 - x \quad dx \int y - 2 \quad dy = \int (4 - x) 12 \quad dx - 1 \quad y = -23(4 - x)^{3/2} + C$$

العام الحل $y = -23(4 - x)^{3/2} + 23 - 12$ بتعويض $C \Rightarrow C = 23 - 12$ (1, 2 + 23 - 12 = 12 - 12)

$$(xy; y(0) = 1) \quad 20 \quad dydx = 2 \sin^2$$

$$2x) \quad dx 12 \quad x \quad dx \int y \quad dy = \int (1 - \cos x) \quad dx \int y \quad dy = \int 2 \sin^2 x \quad y \quad dy = 2 \sin^2 \quad dy \quad dx = 2 \sin^2$$

العام الحل $2x + Cy^2 = x - 12 \sin$

$$(y; y(0) = \pi/4) \quad 21 \quad x \cos^2 \quad dydx = 2 \cos^2$$

$$y \quad dx \quad dx \int \sec^2 y = \int 2 \cos^2 x \quad dx \int dy \cos^2 y = 2 \cos^2 y \quad dy \cos^2 x \cos^2 \quad dydx = 2 \cos^2$$

العام الحل $2x + 1y = x + 12 \sin C = 1 \tan$ بتعويض $C(0, \pi/4 + 0 + 0 = 1$

$$(xey; y(\pi) = 0) \quad 22 \quad x \sin \quad dydx = \cos$$

$x \Rightarrow du \quad dx \quad u = \sin$ نستخدم التعويض $x \quad dx \quad x \sin \quad x \quad ey \quad dy = \int \cos x \sin \quad dydx = \cos$
 $x = \int e \quad du = eu + C = xeu \quad x \quad du \cos x \quad dx = \int \cos x \sin \quad x \quad dx \Rightarrow dx = du \cos = \cos$
 $e^0 = e^0 + C \quad \pi, 0$ العام الحل $x + C \quad dx \quad ey = e \sin x \sin x + C \Rightarrow \int ey \quad dy = \int \cos e \sin$
 عويض $x C = 0 \quad ey = e \sin \Rightarrow$ الخاص الحل

$$(dydx = 8x - 18(3x - 8)(x - 2); y(3) = 8) \quad 23$$

الجزئية الكسور $dydx = 8x - 18(3x - 8)(x - 2) \quad dy = \int 8x - 18(3x - 8)(x - 2) \quad dx$
 $8x - 18(3x - 8)(x - 2) = A(3x - 8) + B(x - 2) + C(3x - 8)(x - 2) = 8x - 18x$ نستخدم
 $= 2 \Rightarrow B = 1 \quad x = 8 \Rightarrow A = 5 \Rightarrow 8x - 18(3x - 8)(x - 2) = 5(3x - 8) + 1(x - 2) \Rightarrow \int dy = \int 8x$
 $|x - 2| |3x - 8| + \ln - 18(3x - 8)(x - 2) \quad dx \Rightarrow y = \int (5(3x - 8) + 1(x - 2)) \quad dx \Rightarrow y = 5(3 \ln$
 $|x - 2| + 8 |3x - 8| + \ln y = 5(3 \ln$ بتعويض $C \Rightarrow C = 8$ 3, 8 + 0 + 0 = 8 العام الحل $C +$

$$(dydx = 1xy; y(e) = 1) \quad 24$$

$C \Rightarrow$ بتعويض C في $1+1=2$ العام $|x|+C dy dx = 1xy f y dy = \int dx x 12y^2 = \ln$
الحل $|x|-12-121zyz=\ln$

(25) تتحرك سيارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية:
 $dv/dt = 10 - 0.5v$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالتر لكل ثانية، أجد
السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علماً بأن السيارة تحركت من
وضع السكون.

$|10 - 0.5v| = t + C \Rightarrow dv/dt = 10 - 0.5v$
 $10 - 0.5v = dt \int dv 10 - 0.5v = \int dt -2 \ln$
 $\ln \Rightarrow$ بتعويض $t=0, v=0$ $10 = 0 + C \Rightarrow C = \ln$
الحل العام $|10 - 0.5v| = -t^2 + C \ln$
الخاص الحل $|10 - 0.5v| = -t^2 + \ln$

إذن، يمكن نمذجة السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها بالعلاقة
الآتية:

$$|10 - 0.5v| = -t^2 \ln$$



(26) ذئب: يمكن نمذجة معدل تغير عدد الذئاب في إحدى الغابات
بالمعادلة التفاضلية: $dN/dt = 260 - 0.4N$ ، حيث N عدد الذئاب في
الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة
بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة
هو 300 ذئب.

$dN/dt = 260 - 0.4N = 0.4(650 - N)$
 $650 - N = 0.4 dt \int dN 650 - N = \int 0.4 dt - \ln$
الحل العام $|650 - N| = 0.4t + C \ln$
الخاص الحل $|350 650 - N| = 0.4t 350 \Rightarrow \ln|650 - N| = 0.4t - \ln$
نعو

لا يمكن أن يكون $N=650$ لأن $\ln 0$ غير معرف ولأن $N=300$ عندما $t=0$ والاقتران
 (N, t) متصل فلا يمكن أن يكون N أكبر من 650، ولذا فإن $N > 0$ ويكون $|N - 650|$
مسار $N - 650$

$(350 650 - N) = \ln$ نعو $t=3$ نجد $(350 650 - N) = 0.4t$
 $\ln \Rightarrow$
 $1.2 \Rightarrow 350 650 - N = e^{65} \Rightarrow 650 - N = 350 e^{-65} \approx 545$

إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئاب في تلك الغابة 545 ذئباً تقريباً.

كرة: تنكمش كرة، ويتغير نصف قطرها بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية:
 $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ ، حيث r طول نصف قطر الكرة بالسنتيمتر، و t الزمن بالثواني
 بعد بدء انكماش الكرة:

(27) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قطر الكرة بعد t ثانية، علماً بأن
 طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

$$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2 \Rightarrow \int \frac{dr}{r^2} = \int -0.0075 dt \Rightarrow -\frac{1}{r} = -0.0075t + C$$

$$1r = 0.0075t + 120 \Rightarrow r = 201 + 0.15t \quad C \Rightarrow C = 120 \quad t = 0, r = 20$$

(28) بعد كم ثانية يصبح طول نصف قطر الكرة 10 cm؟

نضع $r = 10$ في المعادلة الناتجة:

$$201 + 0.15t \Rightarrow 0.1 = 1 + 0.15t \Rightarrow 2 = 1 + 0.15t \Rightarrow t = 10.15 \approx 6.67s = 10$$

إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10cm بعد 6.67 ثانية تقريباً بعد بدء انكماشها.

حشرات: يتغير عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة
 التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ ، حيث n عدد الحشرات، و t الزمن بالأسابيع بعد
 بدء ملاحظة الحشرات:

(29) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعاً،
 علماً بأن عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

$$\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t) \Rightarrow \int \frac{dn}{n} = \int 0.2(0.2 - \cos t) dt \Rightarrow \ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + C$$

$$n = 400 = 0.2(0.400) + \ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + \ln n \quad t = 0, n = 400 \Rightarrow C = \ln 400$$

$$n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t) - \ln 400} \Rightarrow n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t) - \ln 400}$$

(30) أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

نعوض $t = 3$ في المعادلة الأخيرة:

$$n = 400e^{0.2(0.2 \cdot 3 - \sin 3) - \ln 400} = 400e^{0.12 - 0.028 - \ln 400} = 400e^{0.092 - \ln 400} = 400e^{0.092} \cdot e^{-\ln 400} = 400e^{0.092} \cdot \frac{1}{400} = e^{0.092} \approx 1.092 \approx 439$$

إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات 439 حشرة تقريباً.

(31) تمثل المعادلة التفاضلية: $xdydx = y \cos$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(0,1)$.

$$C \Rightarrow C=0 \quad y=+0=0 \quad \text{الحل العام} \quad x+C|y| = \sin x dx \Rightarrow \ln x \int dy y = \int \cos dy dx = y \cos$$

$$xx \Rightarrow y = e \sin |y| = \sin \ln \Rightarrow \text{نعوض } 1, x=0$$

ملاحظة: منحنى الاقتران $xy = -e \sin$ لا يمر بالنقطة $(0,1)$.

(32) تمثل المعادلة التفاضلية: $x(x+1)dydx = y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحنىها يمر بالنقطة $(1,3)$.

$$1x(x+1) = Ax + Bx + 1A(x+1) + B(x) \quad \text{نستخدم الكسور الجزئية} \quad (dy y = \int dx x(x+1) \int$$

$$) = 1x = 0 \Rightarrow A = 1x = -1 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow 1x(x+1) = 1x + -1x + 1 \Rightarrow \int dy y = \int dx x(x+1)$$

$$23 = 0 - \ln \ln \quad \text{الحل العام} \quad |x+1| + C|x| - \ln|y| = \ln|y| = \int (1x + -1x + 1) dx \Rightarrow \ln \Rightarrow \ln$$

$$|y|6 \Rightarrow \ln|x+1| + \ln|x| - \ln|y| = \ln \ln \Rightarrow \text{نعوض } 6 \quad y=3, x=12 = \ln 3 + \ln + C \Rightarrow C = \ln$$

$$|6xx+1| \Rightarrow |y| = |6xx+1| \Rightarrow y = 6xx+1 = \ln$$

ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -6xx+1$ لا يمر بالنقطة $(1,3)$