

أدرب وأحل المسائل

مشتقتا الضرب والقسمة

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(1) $f(x) = x(1+3x)^5$

$$f'(x) = x \times 5(1+3x)^4(3) + (1+3x)^5(1) = (1+3x)^4(18x+1)$$

(2) $f(x) = x+3x+1$

$$f'(x) = (x+1)(1) - (x+3)(1)(x+1)^2 = -2(x+1)^2$$

(3) $f(x) = (2x+1)^5(3x+2)^4$

$$f'(x) = (2x+1)^5 \times 4(3x+2)^3(3) + (3x+2)^4 \times 5(2x+1)^4 \times 2 = 2(2x+1)^4(3x+2)^3(27x+16)$$

(4) $f(x) = 3x^2(2x-1)^2$

$$f'(x) = (2x-1)^2(6x) - (3x^2) \times 2(2x-1)(2)(2x-1)^4 = 6(2x-1)(2x^2 - x - 2x^2)(2x-1)^4 = -6x(2x-1)^3$$

(5) $f(x) = 6x^5x+3$

$$f'(x) = (5x+3)(6) - (6x)(5 \times 25x+3)5x+3 = 30x+18 - 15x(5x+3)5x+3 = 15x+18(5x+3)5x+3$$

(6) $f(x) = (4x-1)(x^2-5)$

$$f'(x) = (4x-1)(2x) + (x^2-5)(4) = 8x^2 - 2x + 4x^2 - 20 = 12x^2 - 2x - 20$$

(7) $f(x) = x^2+62x-7$

$$f'(x) = (2x-7)(2x) - (x^2+6)(2)(2x-7)^2 = 4x^2 - 14x - 2x^2 - 12(2x-7)^2 = 2x^2 - 14x - 12(2x-7)^2$$

(8) $f(x) = x^1+x$

$$f'(x) = (1+x)(1) - (x)(12x)(1+x)^2 = 1+x-12x(1+x)^2 = 1+12x(1+x)^2$$

$$(9) f(x) = (x+1)x - 1$$

$$f'(x) = (x+1) \times 12x - 1 + (x-1)(1) = x+12x-1+x-1 = x+1+2x-22x-1 = 3x-12x-1$$

$$(10) f(x) = x^5 + 2x - 2x^4$$

$$f'(x) = (1)(5+2x) - (x)(2)(5+2x)^2 - 8x^3 = 5(5+2x)^2 - 8x^3$$

$$(11) f(x) = 5(x+2)^2$$

$$f'(x) = (-5)(2)(x+2)(1)(x+2)^4 = -10(x+2)^3$$

$$(12) f(x) = (x+2x)(x^2-3)$$

$$f'(x) = (x+2x)(2x) + (x^2-3)(1-2x^2) = 2x^2+4+x^2-3-2+6x^2 = 3x^2-1+6x^2$$

$$(13) f(x) = (8x+x)(5x^2+3)$$

$$f'(x) = (8x+x)(10x) + (5x^2+3)(8+12x) = 80x^2+10x^3+40x^2+52x^3+24+32x = 120x^2+252x^3+24+32x$$

$$(14) f(x) = 5x - 3(x^4 - 5x^3 + 10x - 2)$$

$$f'(x) = 5x - 25 + 50x - 2 - 10x - 3f'(x) = 5 - 100x - 3 + 30x - 4$$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي عند قيمة المعطاة:

$$(15) f(x) = x^2(3x-1)^3, x=1$$

$$f'(x) = (x^2) \times 3(3x-1)^2 \times 3 + (3x-1)^3(2x)f'(1) = (1)^3(3-1)^2 \times 3 + (3(1)-1)^3(2(1)) = 36+16=52$$

$$(16) f(x) = 3x^5 - x, x=4$$

$$f'(x) = (3x)(-125-x) + (5-x)(3)f'(4) = (3 \times 4)(-1)25 - 4 + (5-4)(3) =$$

$$-122 \times 1 + 1 \times 3 = -6 + 3 = -3$$

$$(17) f(x) = x - 12x + 1, x = 2$$

$$f'(x) = (2x+1)(1) - (x-1)(2)(2x+1)^2 = 3(2x+1)^2 f'(2) = 3(4+1)^2 = 325$$

$$(18) f(x) = (2x+3)(x-2)^2, x = 0$$

$$f'(x) = (2x+3) \times 2(x-2)(1) + (x-2)^2(2) f'(0) = 3 \times 2(-2) + 2(-2)^2 = -12 + 8 = -4$$



أعمال: يُمثل الاقتران: $S(t) = 2000t^4 + 0.3t$ إجمالي المبيعات (بـآلاف الدنانير) لشركة جواهر وحلي، حيث t عدد السنوات بعد عام 2020م:

(19) أجد معدل تغير إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة إلى الزمن t .

$$S'(t) = (4 + 0.3t)(2000) - 2000t(0.3) = 8000(4 + 0.3t) - 600t$$

(20) أجد معدل تغير إجمالي المبيعات للشركة بالنسبة عام 2020م، مفسراً معنى الناتج.

$$t = 2030 - 2020 = 10, S'(10) = 8000(4 + 3) - 600 \times 10 = 8000 \times 7 - 6000 = 50000$$

يتزايد إجمالي المبيعات بمقدار 163 ألف دينار لكل سنة في عام 2030م.

سكان: يُمثل عدد سكان بلدة صغيرة بالاقتران: $P(t) = 12(2t^2 + 100)(t + 20)$ ، حيث t الزمن بالسنوات منذ الآن و P عدد السكان بوحدة الفرد (شخص أو نسمة):

(21) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة بالنسبة إلى الزمن t .

$$P'(t) = 12(2t^2 + 100)(1) + (t + 20) \times 12(4t) = 12(6t^2 + 80t + 100)$$

(22) أجد معدل تغير عدد السكان في البلدة عندما $t = 6$ ، مفسراً معنى الناتج.

$$P'(6) = 12(216 + 480 + 100) = 12(796) = 9552$$

يتزايد عدد السكان بمعدل 9552 نسمة كل سنة بعد 6 سنوات من الآن.



(23) **تفاعلات:** يمكن نمذجة كتلة مركب في أثناء تفاعل كيميائي باستعمال الاقتران: $M(t) = 5.8t^2 + 1.9$ ، حيث t الزمن بالثواني بعد بدء التفاعل، و M الكتلة بالغرام. أجد معدل تغير كتلة المركب بعد 5 ثوان من بدء التفاعل.

$$M'(t) = (t+1.9)(5.8) - (5.8t)(1) \quad M'(5) = 11.02(5+1.9) - 5.8(5) = 11.02(6.9) - 29 = 76.138 - 29 = 47.138$$

أستعمل قاعدة السلسلة في إيجاد $\frac{dy}{dx}$ لكل ممّا يأتي عند قيمة المعطاة:

(24) $y = u(u^2 + 3)^3$, $u = (x+3)^2$, $x = -2$

$$\frac{du}{dx} = 2(x+3)(1) = 2x+6$$

عندما: $x = -2$, فإن: $u = (-2+3)^2 = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-2} &= \frac{dy}{du} \Big|_{u=1} \times \frac{du}{dx} \Big|_{x=-2} \\ \frac{dy}{du} \Big|_{u=1} &= (12+3)^2(7(12)+3) = 16(10) = 160 \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=-2} &= 2(-2)+6 = 2 \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=-2} &= 160 \times 2 = 320 \end{aligned}$$

(25) $y = u^3u + 1$, $u = (x^2+1)^3$, $x = 1$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{du} &= (u+1) \times 3u^2 - u^3(1) \quad \frac{du}{dx} = 3(x^2+1)^2(2x) \\ \frac{dy}{du} &= 3u^2(u+1) - u^3 = 3u^3 + 3u^2(u+1) - u^3 = 2u^3 + 3u^2(u+1) \\ \frac{du}{dx} &= 6x(x^2+1)^2 \end{aligned}$$

عندما: $x = 1$, فإن: $u = (1^2+1)^3 = 8$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} &= \frac{dy}{du} \Big|_{u=8} \times \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} \\ \frac{dy}{du} \Big|_{u=8} &= 2(8^3) + 3(8^2)(8+1) = 1216 + 1681 = 2897 \\ \frac{du}{dx} \Big|_{x=1} &= 6(1)(1^2+1)^2 = 24 \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{x=1} &= 2897 \times 24 = 69528 \end{aligned}$$

إذا كان: $g'(2) = 2$, $g(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $f(2) = 4$, فأجد كلاً ممّا يأتي:

(26) $(fg)'(2)$

$$(fg)'(x) = (f \times g)'(x) = f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x) \quad (fg)'(2) = f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2) = 4 \times 2 + 3 \times -1 = 5$$

(27) $(fg)'$

$$(fg)'(x) = g(x) \times f'(x) - f(x) \times g'(x) \quad (g(x))^2 (fg)'(2) = g(2) \times f'(2) - f(2) \times g'(2) = 3 \times -1 - 4 \times 2 = -11$$

(28) $(3f+fg)'(2)$

$$(3f+fg)'(x) = 3f'(x) + f(x) \times g'(x) + g(x) \times f'(x) \quad (3f+fg)'(2) = 3f'(2) + f(2) \times g'(2) + g(2) \times f'(2) = 3 \times -1 + 4 \times 2 + 3 \times -1 = 2$$