اختبار نهاية الوحدة

التكامل

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

(1) قيمة $\int x3-1x2$ هي:

x22−1x+C (a

x22+1x+C (b

x2−1x+C (c

x2+1x+C (d

$x3-1x2dx=\int(x3x2-1x2)dx=\int(x-x-2)dx=12x2+x-1+C=12x2+1x\int+C$.....b

(2) إذا كان: $\int 02kxdx=6$ فإن قيمة الثابت k:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

$02kxdx=6\Rightarrow k2x2|02=6\Rightarrow k2(2)2-k2(0)2=6\Rightarrow 2k=6\Rightarrow k=3.....\int$c

(3) قيمة: $\int 03)-x2+3x)dx$ هي:

a) 334

b) 2114

c) 412

d) 2212

x2+3x)dx=(−13x3+32x2)|03=(−13(3)3+32(3)2)−(−13(0)3+−)03∫
(32(0)2)=92·····(c

(4) قيمة: ∫02e2x هي:

e4−1 (a

e4−2 (b

2e4−2 (c

12e4−12 (d

02e2xdx=12e2x|02=12e2(2)−12e2(0)=12e4−12.....d∫

(5) قيمة: ∫141x هي:

a) -2

b) 716−

c) 12

d) 2

141xdx=∫14x−12dx=2x12|14=2x|14=24−21=2.....d∫

(6) التكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة بين منحنى الاقتران:
f(x)=4x−x2 والمحور x هو:

4x−x2)dx (a)40∫

4x−x2)dx (b)04∫

4x−x2)dx (c)10∫

4x−x2)dx (d)01∫

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الآتية:

$$f(x)=0\Rightarrow 4x-x2=0\Rightarrow x(4-x)=0\Rightarrow x=0,x=4$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [0,4]، وليكن 1 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(1)=4(1)-(1)2=3>0$$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [0,4]

والتكامل المحدود الذي يمكن عن طريقه إيجاد المساحة المطلوبة هو $\int 04)dx)4x-x2)$

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (7 (3x-1/2dx$$

$$\int 3x-12dx=6x12+C$$

$$\int (8 (8x-10x2)dx$$

$$\int 8x-10x2)dx=4x2-103x3+C)$$

$$\int (9 (5x3dx$$

$$\int 5x3dx=\int 5x-3dx=-52x-2+C=-52x2+C$$

$$\int (10 (x2-1x3dx$$

$$\int x2-1x3dx=\int x2-1x13dx=\int (x2x13-1x13)dx=\int (x53-x-13)dx=38x 83+32x23+C=38x83+32x23+C$$

$$\int (11 (5x2-2e7x)dx$$

$$\int 5x2-2e7x)dx=53x3-27e7x+C)$$

$$\int (12 (2x+3e4x+5)dx$$

2x+3e4x+5)dx=x2+34e4x+5+C)∫

(x2−62xdx (13∫

|x|+Cx2−62xdx=∫(x22x−62x)dx=∫(12x−3x)dx=14x2−3ln∫

(x−1)3dx (14)1∫

x−1)3dx=∫(x−1)−3dx=−12(x−1)−2+C=−12(x−1)2+C)1∫

(exex+4dx (15∫

|ex+4|+Cexex+4dx=ln∫

(2xex2−1dx (16∫

2xex2−1dxu=x2−1⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫2xex2−1dx=∫2xeu×du2∫x=∫eudu=eu+C=ex2−1+C

(4ex(3+e2x)dx (17∫

4ex(3+e2x)dx=∫(12ex+4e3x)dx=12ex+43e3x+C∫

(x(4+2x+x2)8dx (18+1∫

x(4+2x+x2)8dxu=4+2x+x2⇒dudx=2+2x⇒dx=du2+2x∫1+x(4+1∫+2x+x2)8dx=∫1+xu8×du2+2x=∫1+xu8×du2(1+x)=∫12u−8du=−114u−7+C=−114(4+2x+x2)−7+C=−114(4+2x+x2)7+C

((3+x2)dx (19xsin∫

u×(3+x2)dx=∫xsin(3+x2)dxu=3+x2⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫xsinxsin∫(3+x2)+Cu+C=−12cosudu=−12cosdu2x=∫12sin

(x)dx (203x−4cos3sin)∫

x+C3x−4sinx)dx=−cos3x−4cos3sin)∫

((7x+2))dx (21x−sin)∫

(7x+2)+C(7x+2)dx=12x2+17cos(7x+2))dx=∫1xdx−∫sinx−sin)∫

(e3x−e−3x)dx (22)∫

e3x−e−3x)dx=13e3x+13e−3x+C)∫

(21−5xdx (23∫

|1−5x|+C21−5xdx=∫2−5(−5)1−5xdx=−25∫−51−5xdx=−25ln∫

(24) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: dydx=4x−2 فأجد قاعدة العلاقة، علماً بان منحناها يمر بالنقطة (0,3).

y=∫(4x−2)dx=2x2−2x+C

منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,3) إذن:

CC=3y=2x2−2x+3+(0)2−2(0)2=3

(25) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: R′(x)=4x−1.2x2 الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع في إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المبيعة، وR(x) إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد R(x)، علماً بأن R(20)=30000.

R(x)=∫(4x−1.2x2)dx=2x2−0.4x3+C

بما أن R(20)=30000 إذن:

CC=54000R(x)=2x2−0.4x3+54000+3(20)2−0.4(20)2=30000

(26) يتحرك جسيم من السكون، ويعطى تسارعه بالاقتران: a(t)=cos((3t−π))، حيث t الزمن بالثواني، وa تسارعه بالمتر لكل ثانية تربيع. أجد سرعة الجسيم بعد t ثانية من بدء الحركة.

(3t−π)+C(3t−π)dx=13sinv(t)=∫cos

إذا كان ∫−5−1g(x)dx=11−5∫، ∫−55f(x)dx=10,∫1f(x)dx=4، فأجد كلاً مما يأتي:

(15f(x)dx (27−∫

$$\int_{-1}^{5} f(x)dx = \int_{-1}^{-5} f(x)dx + \int_{5}^{5} f(x)dx = -4 + 10 = 6$$

$$\int_{-1}^{5} 7f(x)dx = 7\int_{-1}^{5} f(x)dx = 7 \times 4 = 28$$

(29) $\int_{-1}^{5} (3f(x) - g(x))dx$

$$\int_{-1}^{5} (3f(x) - g(x))dx = 3\int_{-1}^{5} f(x)dx - \int_{-1}^{5} g(x)dx = 3(-4) - (-11) = -1$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(30) $\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx$

$$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 4x + 1)dx = (x^3 - 2x^2 + x)\Big|_{-2}^{3} = ((3)^3 - 2(3)^2 + 3) - ((-2)^3 - 2(-2)^2 - 2) = 30$$

(31) $\int (3x^3 + 2x^2 x dx$

$$\int (3x^3 + 2x^2 x dx = \int 3(x^3 x + 2x^2 x)dx = \int 3(x^2 + 2x)dx = (3x^3 + x^2)\Big|_{1}^{3} = (3(3)^3 + (3)^2) - (3(1)^3 + (1)^2) = 50$$

(32) $\int_{-1}^{5} |x| dx$

أعيد تعريف اقتران القيمة المطلقة:

$$|x| = \begin{cases} -x, & x < 3 \\ x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

بما أن الاقتران تشعب عند 3، فإنني أجزئ التكامل عنده:

$$\int_{-1}^{5} |x| dx = \int_{-1}^{3} (3 - x)dx + \int_{3}^{5} (x - 3)dx = (3x - \frac{1}{2}x^2)\Big|_{-1}^{3} + (\frac{1}{2}x^2 - 3x)\Big|_{3}^{5} = (3(3) - \frac{1}{2}(3)^2) - (3(-1) - \frac{1}{2}(-1)^2) + (\frac{1}{2}(5)^2 - 3(5)) - (\frac{1}{2}(3)^2 - 3(3)) = 4$$

(33) $\int \frac{20}{x} dx$

$$\int \frac{20}{x} dx = \int 20x^{-1} dx = 40x^{\frac{1}{2}}\Big|_{1}^{4} = 40\sqrt{x}\Big|_{1}^{4} = 40(4) - 40(1) = 40$$

(34) $\int 3\sqrt{x}(x + 2)dx$

253x(x+2)dx=∫25(3x2+6x)dx=(x3+3x2)|25=((5)3+3(5)2)−((2)3+∫3(2)2)=180

(232xe−x2dx (35∫

232xe−x2dxu=−x2⇒dudx=−2x⇒dx=du−2xx=3⇒u=−9x=2⇒u=−∫4∫232xe−x2dx=∫−4−92xeu×du−2x=∫−4−9−eudu=−eu|−4−9=−e−9+e−4=−1e9+1e4

(023x2(x3+1)5dx (36∫

023x2(x3+1)5dxu=x3+1⇒dudx=3x2⇒dx=du3x2x=2⇒u=9x=0⇒u∫=1∫023x2(x3+1)5dx=∫193x2u5×du3x2=∫19u−5du=−14u−4|19=−14u4|19=−14(9)4+14(1)4=16406561

(016xx2+1dx (37∫

|x2+1||01=3ln016xx2+1dx=∫013(2x)x2+1dx=3∫012xx2+1dx=3ln∫2|1|=3ln|2|−3ln

(38) إذا كان: f(x)={x2+4,x<04−x,x≥0، فأجد قيمة: ∫21f(x)dx−.

بما أن الاقتران تشعب عند 0، فإنني أجزئ التكامل عنده:

21f(x)dx=∫−20(x2+4)dx+∫01(4−x)dx=(13x3+4x)|−20+(4x−12x−∫2)|01=(0)−(13(−2)3+4(−2))+(4(1)−12(1)2)−(0)=856

(39) يتحرك جسم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: v(t)=5+et−2، حيث t الزمن بالثواني، وv سرعته المتجهة بالمتر لكل ثانية، إذا الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من بدء الحركة.

v(t)=5+et−2s(t)=∫(5+et−2)dt=5t+et−2+Cs(t)=5t+et−2+C

بما أن الجسيم بدأ حركته من نقطة الأصل، إذن s(0)=0:

s(0)=5(0)+e0−2+C0=e−2+CC=−e−2C=−1e2⇒s(t)=5t+et−2−1e2

موقع الجسم بعد 3 ثوان من الحركة هو:

s(3)=5(3)+e3−2−1e2=15+e−1e2m

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران f(x)، ونقطة يمر بها منحنى y=f(x).
أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران f(x):

(f′(x)=3x2+6x−2;(0,6) (40

f(x)=∫(3x2+6x−2)dx=x3+3x2−2x+C

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,6) إذن:

CC=6f(x)=x3+3x2−2x+6+(0)2−2(0)3+3(0)=6

(f′(x)=20x2;(1,400) (41

f(x)=∫20x2dx=∫20x−2dx=−20x−1+C=−20x+C

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (1,400) إذن:

CC=400+20f(x)=−20x+400+20+201−=400

(f′(x)=2x+1x2;(1,1) (42

|x|−1x+C|x|−x−1+C=2lnf(x)=∫(2x+1x2)dx=∫(2x+x−2)dx=2ln

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (1,1) إذن:

|x|−1x+2|1|−11+CC=2f(x)=2ln2ln=1

(f′(x)=5ex−4;(0,−1) **(43**

f(x)=∫(5ex−4)dx=5ex−4x+C

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (0,-1) إذن:

5e0−4(0)+CC=−6f(x)=5ex−4x−6=1−

(f′(x)=xx2+5;(2,10) **(44**

f(x)=∫xx2+5dxu=x2+5⇒dudx=2x⇒dx=du2x∫xx2+5dx=∫xu12×du2

$x=\int 12u12du=13u32+C=13(x2+5)3+C$

بما أن منحنى الاقتران يمر بالنقطة (2,10) إذن:

$CC=1f(x)=13(x2+5)3+1+3(2+5(2))13=10$

(45) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران: $f(x)=x2-x-2$، والمحور x، والمستقيمين: $x=1,x=-2$

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$f(x)=0\Rightarrow x2-x-2=0\Rightarrow(x+1)(x-2)=0\Rightarrow x=-1,x=2$

نختار عدداً ضمن الفترة [-2,1]، وليكن -1.5 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0)=(-1.5+1)(-1.5-2)=1.75>0$

بما أن ناتج التعويض موجب، إذن منحنى الاقتران يقع فوق المحور x في الفترة [-1,-2]

نختار عددا ضمن الفترة [-1,1]، وليكن 0 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$f(0)=(0+1)(0-2)=-2<0$

بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [-1,1]

العدد 2 خارج الفترة المطلوبة بالسؤال، إذن نهمله

$A=\int -2-1(x2-x-2)dx-\int -11(x2-x-2)dx=\int -2-1(x2-x-2)dx+\int -11(-x2+x+2)dx=(13x3-12x2-2x)|-2-1+(-13x3+12x2+2x)|-11=(-13-12+2)-(-83-2+4)+(-13+12+2)-(13+12-2)=316$

إذن، المساحة هي: 316 وحدة مربعة.

(46) طب: يمثل الاقتران $C(1)$ تركيز دواء في الدم بعد t ساعة من حقنه في جسم مريض، حيث C مقيسة بالمليغرام لكل سنتيمتر مكعب ($mg/cm3$). إذا كان تركيز الدواء في دم المريض يتغير بمعدل $C'(t)=3t(t2+36)3$، فأجد مقدار التغير في تركيز الدواء بالدم خلال الساعات الثماني الأولى التي تلت حقنه في جسم المريض.

أولاً نجد قاعدة الاقتران:

$$C(t)=\int 3t(t2+36)3dtu=t2+36\Rightarrow dudt=2t\Rightarrow dt=du2tC(t)=\int 3t(t2+36)3dt=\int 3tu3\times du2t=\int 32u-32du=-3u-12+K=-3u+K=-3t2+36+K$$

بما أن مقدار تركيز الدواء في الدم في البداية هي 0 مليغرام، إذن $C(0)=0$ ومنه:

$$C(t)=-3t2+36+KC(0)=-30+36+K0=12+KK=-12C(t)=-3t2+36-12C(8)=-364+36-12=-810$$

مقدار التغير في تركيز الدواء في الجسم خلال الساعات الثماني الأولى من حقنه هو -0.8 mg/cm2

(47) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)=3x2-3x$، والمحور x.

أولاً نساوي قاعدة الاقتران بالصفر، ونحل المعادلة الناتجة:

$$f(x)=0\Rightarrow 3x2-3x=0\Rightarrow 3x(x-1)=0\Rightarrow x=0,x=1$$

هذه الإحداثيات تمثل حدود التكامل.

نختار عدداً ضمن الفترة [0,1]، وليكن 12 ونعوضه في قاعدة الاقتران:

$$f(0)=3(12)2-3(12)=-34<0$$

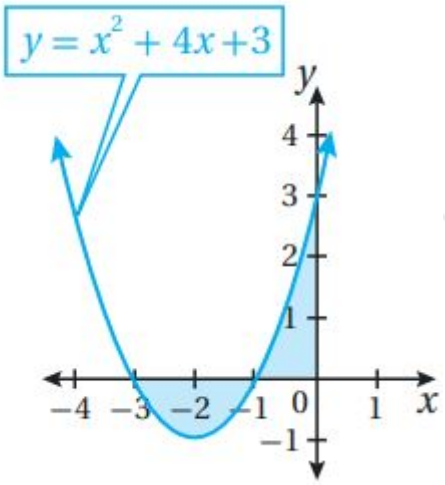
بما أن ناتج التعويض سالب، إذن منحنى الاقتران يقع تحت المحور x في الفترة [0,1]

$$A=-\int 01(3x2-3x)dx=\int 01(-3x2+3x)dx=(-x3+32x2)|01=(-(1)3+32(1)2)-(-(0)3+32(0)2)=12$$

إذن، المساحة هي: 12 وحدة مربعة.

أجد مساحة المنطقة المظللة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:

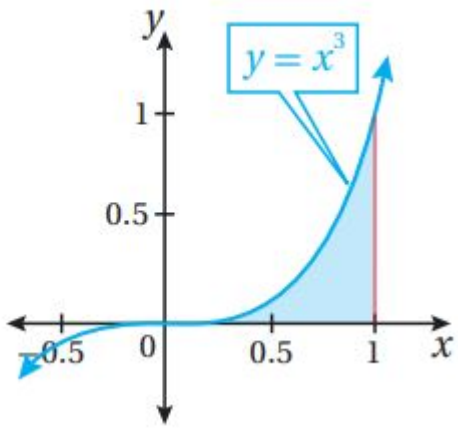
48



$$A=-\int_{-3}^{-1}(x^2+4x+3)dx+\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx=\int_{-3}^{-1}(-x^2-4x-3)dx+\int_{-1}^{0}(x^2+4x+3)dx=(-\frac{1}{3}x^3-2x^2-3x)\Big|_{-3}^{-1}+(\frac{1}{3}x^3+2x^2+3x)\Big|_{-1}^{0}=(\frac{1}{3}-2+3)-(9-18+9)+(0)-(-\frac{1}{3}+2-3)=\frac{8}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

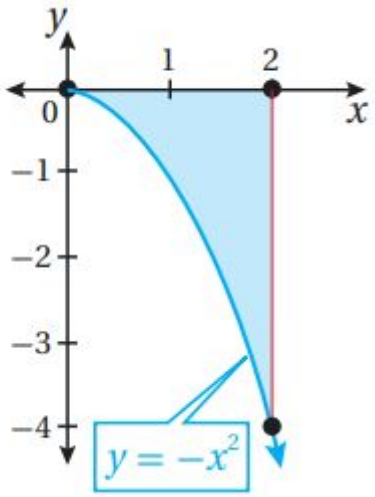
49



$$A=\int_{0}^{1}x^3dx=(\frac{1}{4}x^4)\Big|_{0}^{1}=(\frac{1}{4}(1)^4)-(\frac{1}{4}(0)^4)=\frac{1}{4}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{1}{4}$ وحدة مربعة.

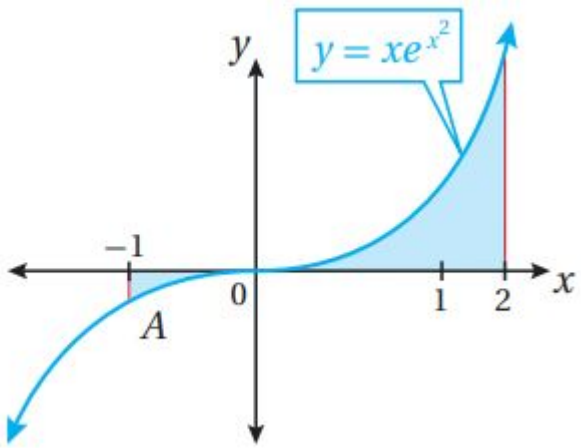
50



$$A=-\int_0^2 -x^2 dx=\int_0^2 x^2 dx=(\frac{1}{3}x^3)|_0^2=(\frac{1}{3}(2)^3)-(\frac{1}{3}(0)^3)=\frac{8}{3}$$

إذن، المساحة هي: $\frac{8}{3}$ وحدة مربعة.

51



$$A=-\int_{-1}^0 xe^{x^2}dx+\int_0^2 xe^{x^2}dx=\int_{-1}^0 -xe^{x^2}dx+\int_0^2 xe^{x^2}dx\\ u=x^2\Rightarrow\frac{du}{dt}=2x\Rightarrow dt=\frac{du}{2x}\\ x=0\Rightarrow u=0\\ x=-1\Rightarrow u=1\\ x=2\Rightarrow u=4\\ A=\int_1^0 -xe^u\times\frac{du}{2x}+\int_0^4 xe^u\times\frac{du}{2x}=\int_1^0 -\frac{1}{2}e^u du+\int_0^4 \frac{1}{2}e^u du=(-\frac{1}{2}e^u)|_1^0+(\frac{1}{2}e^u)|_0^4=(-\frac{1}{2}e^0)-(-\frac{1}{2}e^1)+(\frac{1}{2}e^4)-(\frac{1}{2}e^0)=-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^4$$

إذن، المساحة هي: $-1+\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}e^4$ وحدة مربعة.