أتدرب وأحل المسائل

الضرب القياسي

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

(u→=5i^−4j^+3k^,v→=7i^+6j^−2k^ (1

u→·v→=5(7)−4(6)+3(−2)=5

(u→=4i^−8j^−3k^,v→=12i^+9j^−8k^ (2

u→·v→=4(12)−8(9)−3(−8)=0

(u→=⟨−5,9,17⟩,v→=⟨4,6,−2⟩ (3

u→·v→=−5(4)+9(6)+17(−2)=0

(u→=⟨1,−4,12⟩,v→=⟨3,10,−5⟩ (4

u→·v→=1(3)−4(10)+12(−5)=−97

أجد قياس الزاوية θ بين المتجهين إلى أقرب عشر درجة في كل مما يأتي:

(m→=4i^−2j^+5k^,n→=3i^+4j^−2k^ (5

m→|=16+4+25=45|n→|=9+16+4=29m→·n→=4(3)−2(4)+5(−2)=|(−61305)=(−645×29)=cos−1(m→·n→|m→||n→|)=cos−1−6θ=cos−1∘99.6

(v→=⟨3,−2,9⟩,w→=⟨5,3,−4⟩ (6

v→|=9+4+81=94|w→|=25+9+16=50v→·w→=3(5)−2(3)+9(−4)=−|∘(−2794×50)≈113.2(v→·w→|v→||w→|)=cos−127θ=cos−1

(7) إذا كانت A(3,5,−4),B(7,4,−3) وO نقطة الأصل، فأجد m∠OAB إلى أقرب درجة.

AO→=⟨−3,−5,4⟩|AO→|=9+25+16=50AB→=⟨4,−1,1⟩|AB→|=16+1+1

$(AO→·AB→|AO→||AB=18AO→·AB→=−3(4)−5(−1)+4(1)=−3θ=cos−1∘(−0.1)≈96(−350×18)=cos−1→|)=cos−1$

(8) يمر المستقيم l1 بالنقطتين: (2,−1,4)،(7,−3,5)، ويمر المستقيم l2 بالنقطتين: (6,−3,5)،(−1,2,1) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم l2 والمستقيم l1 إلى أقرب عشر درجة.

اتجاه المستقيم l1 هو: $v→=⟨−3−2,5+1,7−4⟩=⟨−5,6,3$

اتجاه المستقيم l2 هو: $w→=⟨1−6,2+5,−1−3⟩=⟨−5,7,−4$

$v→|=25+36+9=70|w→|=25+49+16=90v→·w→=−5(−5)+6(7)+3(−∘(556300)≈46.1(u→·w→|u→||w→|)=cos−14)=55θ=cos−1$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين l1 وl2 هو 46.1° تقريباً.

(9) إذا كان المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $r→=⟨1,4,−5⟩+λ⟨−6,q+5,3⟩$، والمستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $r→=⟨1,4,−5⟩+μ⟨5,q−6,−4⟩$ متعامدين، فما القيم الممكنة للثابت q؟

اتجاه المستقيم الأول هو: $v→=⟨−6,q+5,3⟩$

اتجاه المستقيم الثاني هو: $u→=⟨5,q−6,−4⟩$

المستقيمان متعامدان، فاتجاههما متعامدان، أي أن: $v→·u→=0$

$q+5)(q−6)+3(−4)=0⇒q2−q−72=0⇒(q−9)(q+8)=0⇒q=9,)+(5)6−⇒$ or $q=−8$

إذا كانت: $r→=2j^−3k^+t(−i^+2j^+5k^)$ معادلة متجهة للمستقيم ا، والنقطة $P(−2,22,5)$ غير واقعة على المستقيم ا، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(10) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم ا.

لتكن A هي المسقط العمودي للنقطة P على المستقيم ا، فإن متجه موقعها هو:

$OA→=⟨−t,2+2t,−3+5t⟩$

إذا كان $\bar{AP}$ هو العمود من P على المستقيم ا، فإن: $AP→=OP→−OA→$

$\langle AP\rightarrow=\langle -2+t,22-(2+2t),5-(-3+5t)\rangle=\langle -2+t,20-2t,8-5t\Rightarrow$

بما أن $AP\rightarrow$ يعامد ا، إذن: $AP\rightarrow\cdot\langle -1,2,5\rangle=0$

$t)+2(20-2t)+5(8-5t)=0\Rightarrow t=4115\Rightarrow OA\rightarrow=(-4115,11215,3+2-)1-\Rightarrow \langle 23$

إذن، مسقط العمود P على المستقيم ا هو $A(-4115,11215,323)$

(11) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم ا.

$AP=(-2+4115)2+(22-11215)2+(5-323)2=5487015\approx 15.6$

(12) أجد مساحة المثلث ABC، حيث: $AB\rightarrow=\langle 4,9,1\rangle, AC\rightarrow=\langle 9,1,4\rangle$.

$AB\rightarrow|=16+81+1=98|AC\rightarrow|=81+1+16=98AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow=9(4)+1(9)+4(|1)=49$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$(12)=60\circ(4998\times 98)=\cos-1(AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow|AB\rightarrow||AC\rightarrow|)=\cos-1\theta=\cos-160\circ=4932\theta=1298\times 98\sin Area=12|AB\rightarrow|\times|AC\rightarrow|\sin$

(13) أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1,3,1), B(2,7,-3), C(4,-5,2)$.

$AB\rightarrow=\langle 1,4,-4\rangle\Rightarrow|AB\rightarrow|=1+16+16=33AC\rightarrow=\langle 3,-8,1\rangle\Rightarrow|AC\rightarrow|=9+64+1=74AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow=1(3)+4(-8)-4(1)=-33$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$(-3374)(-3333\times 74)=\cos-1(AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow|AB\rightarrow||AC\rightarrow|)=\cos-1\theta=\cos-1\theta=1233\theta=1-3374=4174Area=12|AB\rightarrow|\times|AC\rightarrow|\sin\theta=-3374\Rightarrow\sin\cos\times 744174=13532\approx 18.4$

(14) حـــزام ناقـــل: يمثـــل المتجـــه: $\hat{F}\rightarrow=5\hat{i}-3\hat{j}+k$ القـوة التـي يولـدها حـزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة (1,1,1) إلـى النقطـة 9,4,7. أجـد مقـدار الشغـل الـذي تبذلـه القـوة F، علماً بـأن القـوة بـالنيوتن N، والمسافة بالمتر m، ومقدار الشغل (W) المبذول بوحـدة الجـول (J) يسـاوي نـاتج الضـرب القياسـي لمتجه القوة في متجه الإزاحة؛ أي: $W=F\rightarrow\cdot d\rightarrow$.

$$d\rightarrow=\langle 8,3,6\rangle, F\rightarrow=\langle 5,-3,1\rangle W=F\rightarrow\cdot d\rightarrow=5(8)-3(3)+1(6)=37J$$

(15) إذا كانت النقطة $R(27,-17,-1)$، والنقطة $S(11,-9,11)$ تقعان على المستقيم ا، وكانت النقطة Q تقع على المستقيم ا، حيث $\bar{OQ}$ عمودي على ا، فأجد متجه الموقع للنقطة Q.

$$\{d\rightarrow=\langle 8,3,6\rangle, F\rightarrow=\langle 5,-3,1\rangle W=F\rightarrow\cdot d\rightarrow=5(8)-3(3)+1(6)=37$$

إذن، يمكن تبسيط اتجاه المستقيم ا بقسمة $RS\rightarrow$ على 4:

$$\langle v\rightarrow=\langle -4,2,3$$

معادلة المستقيم ا هي: $\langle r\rightarrow=\langle 11,-9,11\rangle+t\langle -4,2,3$

النقطـة Q هي المسـقط العمـودي للنقطـة O على هـذا المسـتقيم، فيكـون متجـه موقعها $OQ\rightarrow$ هو:

$$\langle OQ\rightarrow=\langle 11-4t,-9+2t,11+3t$$

بما أن ا و$\bar{OQ}$ متعامدان، فإن: $OQ\rightarrow\cdot v\rightarrow=0$

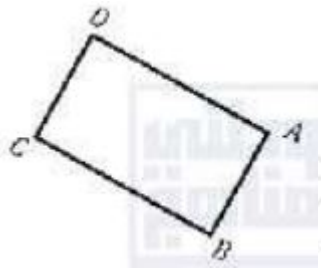
$$\langle 11-4t)+2(-9+2t)+3(11+3t)=0\Rightarrow t=1\Rightarrow OQ\rightarrow=\langle 7,-7,14)4-\Rightarrow$$

إذا كانت متجهات مواقع النقاط: A، وB، وC هي:
$(-2297),(41714),(-41322)$ على الترتيب، فأجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعاً:

(16) أثبت أن: $\bar{AD}\perp\bar{AB}$.

$OA\rightarrow=\langle -4,13,22\rangle, OB\rightarrow=\langle 4,17,14\rangle, OD\rightarrow=\langle 2,-29,7\rangle AD\rightarrow=\langle 2+4,-29-13,7-22\rangle=\langle 6,-42,-15\rangle AB\rightarrow=\langle 4+4,17-13,14-22\rangle=\langle 8,4,-8\rangle AB\rightarrow\cdot AD\rightarrow\rightarrow=6(8)-42(4)-15(-8)=0AB\rightarrow\perp AD$

(17) أجد متجه موقع النقطة C إذا كان ABCD مستطيلاً.



ارسم شكل مستوي تقريبي يوضح المسألة (المهم ترتيب رؤوس المستطيل ABCD بالتوالي مع عقارب الساعة أو عكس عقارب الساعة)، أينما كان موقع O، فإن:

$OC\rightarrow=OB\rightarrow+BC\rightarrow=OB\rightarrow+AD\rightarrow=\langle 4,17,14\rangle+\langle 6,-42,-15\rangle=\langle 10,-25,-1\rangle$

(ويمكن إيجاد $OC\rightarrow$ عبر الرأس D من العلاقة: $OC\rightarrow=OD\rightarrow+DC\rightarrow=OD\rightarrow+AB\rightarrow$)

(18) أجد مساحة المستطيل ABCD.

$AD\rightarrow|=36+1764+225=2025=45|AB\rightarrow|=64+16+64=144=12Area=(|45)(12)=540$

إذن، مساحة ABCD تساوي 540 وحدة مربعة.

(19) أجد متجه موقع مركز المستطيل ABCD.

مركز المستطيل هي نقطة تقاطع قطريه وهي نقطة منتصف كل من القطرين. نأخذ القطر $\bar{BD}$ ولتكن نقطة منتصفه E، فإن:

$\langle E(4+22,17-292,14+72)=(3,-6,212)\Rightarrow OE\rightarrow=\langle 3,-6,212$

تمثل: $l1$ معادلة متجهة للمستقيم $r\rightarrow=\langle -5,7,1\rangle+t\langle 3,1,4$، وتُمثل:
$l2$ معادلة متجهة للمستقيم $r\rightarrow=\langle 2,8,-1\rangle+u\langle 2,0,-3$، وتمثل:
$l3$ معادلة متجهة للمستقيم $r\rightarrow=\langle 3,19,10\rangle+v\langle -1,3,1$.

إذا تقاطع المستقيم $l2$ والمستقيم $l1$ في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على المستقيم $l3$، حيث: $l3\perp\bar{TF}$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(20) أجد إحداثيات النقطة F.

لإيجاد نقطة تقاطع l1 نساوي l2 في معادلتهما ونساوي الإحداثيات المتناظرة:

$\langle 5+3t,7+t,1+4t\rangle=\langle 2+2u,8,-1-3u\rangle -5+3t=2+2u\Rightarrow 3t-2u=7.....(-)$
$(1)7+t=8\Rightarrow t=11+4t=-1-3u\Rightarrow 4t+3u=-2.....(2$

بتعويض $t=1$ في المعادلتين (1) و(2) نجد أن $u=-2$

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=1$ في معادلة l1

$\langle r\rightarrow=\langle -5+3(1),7+1,1+4(1)\rangle=\langle -2,8,5$

إذن، نقطة تقاطع l1,l2 هي $T(-2,8,5$)

F هو المسقط العمودي للنقطة T على l3، إذن:

$OF\rightarrow=\langle 3-v,19+3v,10+v\rangle TF\rightarrow=\langle 3-v-(-2),19+3v-8,10+v-5\rangle=\langle 5-v$
$\langle ,11+3v,v+5$

اتجاه l3 هو $\langle w\rightarrow=\langle -1,3,1$

لكن $TF\rightarrow$ يعامد l3 إذن، $TF\rightarrow\cdot w\rightarrow=0$

$v)+3(11+3v)+1(v+5)=0\Rightarrow v=-3\Rightarrow OF\rightarrow=\langle 3-(-3),19+3(-3),-5)1-\Rightarrow$
$(10-3\rangle\Rightarrow F(6,10,7$

(21) أجد البعد بين النقطة T والمستقيم l3.

$TF\rightarrow=\langle -8,2,-2\rangle\Rightarrow|TF\rightarrow|=64+4+4=62$

إذا كانت: $\langle r\rightarrow=\langle 5,3,0\rangle+\lambda\langle -1,3,1$ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت
$B(5,3,0),A(3,-2,1$)، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(22) أجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $AB\leftrightarrow$ والمستقيم l.

$\langle AB\rightarrow=\langle 2,5,-1$

وهذا هو اتجاه المستقيم $AB\rightarrow$

اتجاه المستقيم l هو: $\langle \vec{v}=\langle -1,3,1$

$|\vec{AB}|=4+25+1=30|\vec{v}|=1+9+1=11\vec{AB}\cdot\vec{v}=2(-1)+5(3)-1(1)=12|$
$\circ(1230\times11)\approx48.7(\vec{AB}\cdot\vec{v}|\vec{AB}||\vec{v}|)=\cos-1\theta=\cos-1$

(23) تقع النقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$، حيث: AB=AC. أجد إحداثيات النقطة C.

بما أن A,B,C عى استقامة واحدة، وAB=AC إذن، A(3,−2,1) هي نقطة منتصف $\bar{BC}$ حيث:

$C(x,y,z),B(5,3,0)\Rightarrow(x+52,y+32,z+02)=(3,-2,1)\Rightarrow x+52=3\Rightarrow x=1y+32$
$=-2\Rightarrow y=-7z+02=1\Rightarrow z=2$

إذن، أحداثيات النقطة C هي: (1,−2,7)

تقع النقطة A(−7,−4,9) والنقطة B(8,5,3) على المستقيم l1، وتقع النقطة C(6,11,7) على المستقيم l2 الذي معادلته: $\langle \vec{r}=\langle 6,11,7\rangle+t\langle -1,3,2$:

(24) أبين أن النقطة B تقع على المستقيم l2.

متجه موقع أي نقطة على l2 يكون $\langle \vec{r}=\langle 6-t,11+3t,7+2t$

حتى تقع B على l2 ينبغي وجود قيمة t تحقق المعادلة: $\langle 8,5,3-6\rangle=\langle t,11+3t,7+2t\rangle$

$t=8\Rightarrow t=-211+3t=5\Rightarrow t=-27+2t=3\Rightarrow t=-2-6\Rightarrow$

لهذه المعدلات الثلاث الحل نفسه t=-2

إذن، تقع B على المستقيم l2 لأنها تنتج من تعويض t=-2 في معادلته.

(25) أبين أن المستقيم l1 والمستقيم l2 متعامدان.

اتجاه l1 هو: $\langle \vec{AB}=\langle 15,9,-6$

ويمكن تبسيطه إلى $\langle \vec{u}=\langle 5,3,-2$

اتجاه l2 هو: $\langle \vec{v}=\langle -1,3,2$

$u\rightarrow\cdot v\rightarrow=5(-1)+3(3)-2(2)=0$

إذن، المستقيمان l_1,l_2 متعامدان.

(26) أجد $m\angle ABC$.

بما أن l_1,l_2 متعامدان، ونقطة التقائهما هي B (كونها واقعة على كل منهما كما سبق)

إذن، $m\angle ABC=90^\circ$

(27) أجد مساحة المثلث ABC.

المثلث ABC قائم في B

$AB=\sqrt{1^2+9^2+(-6)^2}=\sqrt{34}BC=\sqrt{2^2+(-6)^2+(-4)^2}=\sqrt{56}=2\sqrt{14}Area=\frac{1}{2}(AB)(BC)=\frac{1}{2}\sqrt{34}\times2\sqrt{14}=\sqrt{478}\approx69.2$

إذن، مساحة المثلث ABC تساوي 69.2 وحدة مربعة تقريباً.

ABCD هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي:
$A(4,3,-1),B(-4,5,2),C(6,-1,0),D(10,11,19)$ فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعاً:

(28) أجد مساحة المثلث ABC في صورة: $a\sqrt{6}$.

$AB\rightarrow=\langle-8,2,3\rangle\Rightarrow|AB\rightarrow|=\sqrt{64+4+9}=\sqrt{77}AC\rightarrow=\langle2,-4,1\rangle\Rightarrow|AC\rightarrow|=\sqrt{4+16+1}=\sqrt{21}AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow=-8(2)+2(-4)+3(1)=-21$

ليكن θ قياس الزاوية BAC

$\theta=\cos^{-1}(\frac{AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow}{|AB\rightarrow||AC\rightarrow|})=\cos^{-1}(\frac{-21}{\sqrt{77}\times\sqrt{21}})\theta=\cos^{-1}\theta=\cos^{-1}(-\frac{11}{\sqrt{77}\times\sqrt{21}\times\sqrt{22}})\theta=\frac{11}{\sqrt{77}\times\sqrt{21}\times\sqrt{22}}=\frac{1}{\sqrt{76}}\theta=\frac{1}{2\sqrt{19}}\theta=\frac{\sqrt{19}}{38}Area=\frac{1}{2}|AB\rightarrow|\times|AC\rightarrow|\sin\theta=\frac{11}{\sqrt{77}\times\sqrt{21}\times\sqrt{22}}\Rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{77}\times\sqrt{21}\times\sqrt{22}}{11}=\sqrt{76}$

(29) أثبت أن: $m\angle AED=90^\circ$، حيث $E(1,2,1)$.

$EA\rightarrow=\langle3,1,-2\rangle,ED\rightarrow=\langle9,9,18\rangle EA\rightarrow\cdot ED\rightarrow=3(9)+1(9)-2(18)=0$

إذن، $EA\rightarrow\perp ED\rightarrow$ وقياس الزاوية AED هو 90°.

(30) إذا علمت أن النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم ABCD.

$|DE\rightarrow|=81+81+324=96$

ويمثل ارتفاع h، أما مساحة قاعدته A=76، وذلك من السؤال 28 ، إذن حجم الهرم هو:

$V=\frac{1}{3}Ah=\frac{1}{3}\times76\times96=126$

إذن حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.

إذا كانت $A(3,1,-6),B(5,-2,0),C(8,-4,-6)$، فأجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعاً:

(31) أبين أن : $AC\rightarrow=n(1-10)$، حيث n عدد صحيح.

$AC\rightarrow=\langle5-50\rangle=5(1-10)$

تكون قيمة n هي 5

(32) أبين أن قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5}{214}$.

$CA\rightarrow=\langle-5,5,0\rangle\Rightarrow|CA\rightarrow|=25+25+0=5\sqrt{2}CB\rightarrow=\langle-3,2,6\rangle\Rightarrow|CB\rightarrow|=9+4+36=7CA\rightarrow\cdot CB\rightarrow=-5(-3)+5(2)+0(6)=25$

ليكن θ قياس الزاوية ACB

$\theta=\cos^{-1}(\frac{AB\rightarrow\cdot AC\rightarrow}{|AB\rightarrow||AC\rightarrow|})=\cos^{-1}(\frac{25}{5\sqrt{2}\cdot2})=\cos^{-1}(\frac{5}{2\sqrt{2}})$

(33) أكتب معادلة متجهة للمستقيم $AC\leftrightarrow$.

$AC\rightarrow=\langle5,-5,0\rangle$

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $AC\rightarrow$ بالمتجه $v\rightarrow=\langle1,-1,0\rangle$

وتكون معادلته: $r\rightarrow=\langle8,-4,-6\rangle+t\langle1,-1,0\rangle$

(34) إذا كانت D(6,−1,p)، وعُلم أن AC↔,BD↔، متقاطعان، فما قيمة p؟

⟨BD→=⟨1,1,p

ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم BD→ بالمتجه ⟨v→=⟨1,1,p

معادلة ⟨BD→: r→=⟨5,−2,0⟩+u⟨1,1,p

يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u,t بحيث تتساوى لهما r→ في المعادلتين:

t,−4−t,−6⟩=⟨5+u,−2+u,up⟩8+t=5+u⇒t−u=−3.....(1)−4−t=+8⟨
(−2+u⇒t+u=−2.....2up=−6.....(3

بجمع المعادلتين (1) و(2)، نجد أن: t=−52,u=12 ثم بالتعويض في (3) نجد أن:
p=−12

(D(6,−1,−12

(35) أبين أن الشكل ABCD معين، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

AB→=⟨2,−3,6⟩DC→=⟨2,−3,6⟩}⇒AB→=DC→BC→=⟨3,−2,−6⟩AD→=⟨3,
→−2,−6⟩}⇒BC→=AD

من (1) و(2) ينتج أن الشكل ABCD متوازي أضلاع، والآن نجد طول ¯AD¯,AB

AB=|AB→|=4+9+36=49=7AD=|AD→|=9+4+36=49=7

وبما أن ABCD متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.

(36) أحل المسألة الواردة في بداية الدرس.

تم حل هذا السؤال في موضعه تحت عنوان "مسألة اليوم".