أتحقق من فهمي

الضرب القياسي

الضرب القياسي للمتجهات في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (144):

أجد ناتج الضرب القياسي للمتجهين في كل مما يأتي:

(a $\vec{v}=\langle 4,8,-3\rangle, \vec{w}=\langle -3,7,2\rangle$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=4(-3)+8(7)-3(2)=-12+56-6=38$

(b $\vec{m}=-3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}, \vec{n}=-12\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$

$\vec{m}\cdot\vec{n}=-3(-12)+5(6)-1(-8)=36+30+8=74$

الزاوية بين متجهين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (146):

أجد قياس الزاوية θ بين المتجه $\vec{u}$ والمتجه $\vec{W}$ في كل مما يأتي، مقرباً الناتج إلى أقرب عشـر درجة:

(a $\vec{u}=-3\hat{i}+5\hat{j}-4\hat{k}, \vec{w}=4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$

$\vec{u}\cdot bbb|\vec{u}|=9+25+16=50|\vec{w}|=16+4+9=29\vec{u}\cdot\vec{w}=-3(4)+5(2)-4(-3)=-12+10+12=10\theta=\cos-1\circ(101450)\approx 74.8(1050\times 29)=\cos-1\vec{w}|\vec{u}||\vec{w}|)=\cos-1$

(b $\vec{u}=\langle 2,-10,6\rangle, \vec{w}=\langle -3,15,-9\rangle$

$\vec{u}|=4+100+36=140|\vec{w}|=9+225+81=315\vec{u}\cdot\vec{w}=2(-3)-10(15)+6(9)=-6-150-54=-210\theta=\cos|\circ(-1)=180(-21044100)=\cos-1(-210140\times 315)=\cos-1(\vec{u}\cdot\vec{w}|\vec{u}||\vec{w}|)=\cos-1-1$

الزاوية بين مستقيمين في الفضاء

أتحقق من فهمي صفحة (147):

إذا كانت: $r\rightarrow=(3-21)+t(2-5-1)$ معادلة متجهة للمستقيم $l1$، وكانت: $r\rightarrow=(530)+u(10-3)$ معادلة متجهة للمستقيم $l2$، فأجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيم $l1$ والمستقيم $l2$ إلى أقرب درجة.

اتجاه المستقيم $l1$ هو $v\rightarrow=\langle 2,-5,-1\rangle$ واتجاه المستقيم $l2$ هو $u\rightarrow=\langle 1,0,-3\rangle$

$$|v\rightarrow|=4+25+1=30|u\rightarrow|=1+0+9=10v\rightarrow\cdot u\rightarrow=1(2)+0(-5)-3(-1)=2+|$$
$$\circ(5300)\approx73(510\times30)=\cos-1(u\rightarrow\cdot v\rightarrow|u\rightarrow||v\rightarrow|)=\cos-13=5\theta=\cos-1$$

إذن، قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين $l1,l2$ هو 73° تقريباً.

إيجاد مساحة المثلث باستعمال المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (149):

أجد مساحة المثلث EFG الذي إحداثيات رؤوسه هي:

$$.(E(2,1,-1),F(5,1,7),G(6,-3,1$$

$$GF\rightarrow=\langle -1,4,6\rangle|GF\rightarrow|=1+16+36=53GE\rightarrow=\langle -4,4,-2\rangle|GE\rightarrow|=16+16+$$
$$4=6GF\rightarrow\cdot GE\rightarrow=-1(-4)+4(4)+6(-2)=4+16-12=8$$

ليكن قياس الزاوية EGF هو θ، إذن:

$$(8653)\approx79.4\circ A=12|GF\rightarrow|\times|(GF\rightarrow\cdot GE\rightarrow|GF\rightarrow||GE\rightarrow|)=\cos-1\theta=\cos-1$$
$$79.4\circ\approx21.5\theta\approx12\times653\sin GE\rightarrow|\sin$$

ويمكن إيجاد $\theta\sin$ من معرفتنا بقيمة $\theta\cos$ من دون أيجاد زاوية θ كما يأتي:

$$\theta=1-(4353)2=477-16477=461353\Rightarrow A=12\times653\times4\theta=4353\Rightarrow\sin\cos$$
$$61353=461\approx21.5$$

مسقط العمود على مستقيم من نقطة خارجه

أتحقق من فهمي صفحة (151):

إذا كانت: $\hat{r}\rightarrow=16\hat{i}+11\hat{j}-3\hat{k}+t(5\hat{i}+7\hat{j}-3k$) معادلة متجهة للمستقيم ا، والنقطة P(2,0,103) غير واقعة على المستقيم ا، فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(a) أحدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم ا.

اتجاه المستقيم ا المعطى هو: $\vec{v}=\langle 5,7,-3$

افرض أن مسقط النقطة P على ا النقطة F، فيكون متجه موقعها هو:

$\hat{OF}=(16+5t)\imath+(11+7t)\jmath-(3+3t)k$

ويكون العمود من P على ا هو $\bar{PF}$ حيث:

$\vec{PF}=\vec{OF}-\vec{OP}=(16+5t)1+(11+7t)\jmath-(3+3t)\hat{k}-(2\hat{i}+103\hat{k})\Rightarrow \hat{PF}=(14+5t)\hat{i}+(11+7t)\jmath-(193+3t)k$

ولأن المتجهين $\vec{PF},\vec{v}\rightarrow$ متعامدان فإن $\vec{PF}\cdot\vec{v}\rightarrow=0$

$14+5t)+7(11+7t)-3(-193-3t)=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow\vec{OF}=(16+5(-2))\hat{i}+)5\Rightarrow \hat{(11+7(-2))j}-(3+3(-2))\hat{k}=6\hat{i}-3\hat{j}+3k$

إذن مسقط العمود من النقطة P على المستقيم ا هو النقطة F(6,−3,3)

(b) أجد البعد بين النقطة P والمستقيم ا.

$PF=(6-2)2+(-3-0)2+(3-103)2=2263$

استعمال المتجهات لتحديد قياسات في أشكال ثلاثية الأبعاد

أتحقق من فهمي صفحة (154):

(a) أجد قياس $\angle EDB$ في الهرم المبين في المثال السابق.

$\vec{DE}\rightarrow=\langle 7,8,2\rangle|\vec{DE}\rightarrow|=49+64+4=117\vec{DB}\rightarrow=\langle 8,4,-8\rangle|\vec{DB}\rightarrow|=64+16+64=12\vec{DE}\rightarrow\cdot\vec{DB}\rightarrow=7(8)+8(4)+2(-8)$
$\circ(6117)\approx 56.3(7212117)=\cos-1(\vec{DE}\rightarrow\cdot\vec{DB}\rightarrow|\vec{DE}\rightarrow||\vec{DB}\rightarrow|)=\cos-1=72\theta=\cos-1$

(b) أجد حجم الهرم.

$AB=82+(-2)2+(-2)2=72$

ارتفاع الهرم هو طول العمود المرسوم من الرأس E إلى قاعدته وهو EM، حيث M هي نقطة منتصف أحد قطري الفاعدة المربعة: $M=(1+92,1-72,-1+32)=(5,-3,1)$

$EM=(-3)2+(-6)2+(-6)2=9$

حجم الهرم يساوي ثلث مساحة قاعدته في ارتفاعه.

$V=13(72)2(9)=72(3)=216$

إذن، حجم الهرم يساوي 216 وحدة مربعة.