

أتحقق من فهمي

المستقيمات في الفضاء

توازي المتجهات

أتحقق من فهمي صفحة (127):

إذا كان: $G(7,5,-11), H(4,4,-4), K(4,5,3), L(7,7,3)$ ، فأحدد إن كان كل متجهين مما يأتي متوازيين أم لا:

$$(GH \rightarrow, KL \rightarrow) \text{ (a)}$$

$$\langle GH \rightarrow = \langle -3, -1, 7 \rangle, KL \rightarrow = \langle 3, 2, 0 \rangle$$

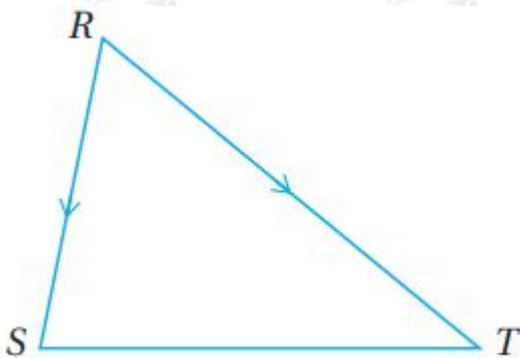
نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي c يجعل العبارة $\langle GH \rightarrow = c \langle KL \rightarrow$ صحيحة، ونستنتج أن $GH \rightarrow, KL \rightarrow$ غير متوازيين.

$$(GL \rightarrow, HK \rightarrow) \text{ (b)}$$

$$\langle GL \rightarrow = \langle 0, 2, 14 \rangle, HK \rightarrow = \langle 0, 1, 7 \rangle$$

نلاحظ أن $GL \rightarrow = 2HK \rightarrow$ ، ونستنتج أن $GL \rightarrow \parallel HK \rightarrow$

أتحقق من فهمي صفحة (129):



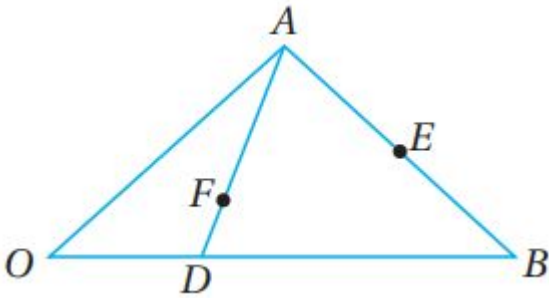
في المثلث RST المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{RS} = 4a$ ، والنقطة U منتصف RS ، $\overrightarrow{RT} = 6b$ ، والنقطة V منتصف RT ، فأثبت أن $\overrightarrow{ST} \parallel \overrightarrow{UV}$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{UV} &= \overrightarrow{UR} + \overrightarrow{RV} = 12(-4a) + 12(6b) = 3b - 2a \\ \overrightarrow{ST} &= \overrightarrow{SR} + \overrightarrow{RT} = (-4a + 6b) = 2(3b - 2a) \end{aligned}$$

إذن، $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{UV}$ ، ومنه المتجهان $\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{UV}$ متوازيان.

أتحقق من فهمي صفحة (130):

يظهر في الشكل المجاور المثلث OAB.



إذا كان: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ ، وكانت النقطة D تقع على $\vec{OB}$ ، والنقطة E منتصف $\vec{AB}$ ، والنقطة F تقع على $\vec{AD}$ ، حيث: $\vec{OF} = \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b})$ ، فأثبت أن O، F، و E تقع على استقامة واحدة.

$$\begin{aligned} \vec{OF} &= \frac{1}{5}(\vec{a} + \vec{b}) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 5\vec{OF} \quad (1) \\ \vec{OE} &= \vec{OB} + \vec{BE} \\ &= \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{BA} = \vec{b} + \frac{1}{2}(\vec{BO} + \vec{OA}) = \vec{b} + \frac{1}{2}(-\vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \\ &\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{OE} \quad (2) \end{aligned}$$

من العلاقتين (1) و (2) نستنتج أن:

$$5\vec{OF} = 2\vec{OE} \Rightarrow \vec{OF} = \frac{2}{5}\vec{OE}$$

وهذا يعني أن المتجهين $\vec{OF}$ ، $\vec{OE}$ متوازيان، وبما أنهما ينطلقان من النقطة O نفسها، إذن النقاط O، E، F تقع على استقامة واحدة.

المعادلة المتجهة للمستقيم

أتحقق من فهمي صفحة (132):

أجد معادلة متجهة للمستقيم α الذي يوازي المتجه: $\vec{v} = \langle 1, -4, -5 \rangle$ ، ويمر بالنقطة $U(0, -6, 9)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \langle 0, -6, 9 \rangle + t\langle 1, -4, -5 \rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة (133):

أجد معادلة متجهة للمستقيم α المار بالنقطتين: $M(3, 7, -9)$ ، $N(2, -4, 3)$.

$$\vec{NM} = \langle 3-2, 7-(-4), -9-3 \rangle = \langle 1, 11, -12 \rangle \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v} \Rightarrow \vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t\langle 1, 11, -12 \rangle$$

أتحقق من فهمي صفحة (136):

تمثل: $\vec{r} = 11\hat{i} + 5\hat{j} - 6\hat{k} + t(7\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k})$ معادلة متجهة للمستقيم ا:

(a) أبين أن النقطة التي متجه الموقع لها هو $(39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k})$ تقع على المستقيم ا.

$$\vec{r} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k}$$

نبحث عن قيمة ل t تحقق:

$$39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k} \Rightarrow 39 = 11+7t \Rightarrow t=4$$

$$-3 = 5-2t \Rightarrow t=4 \quad 14 = -6+5t \Rightarrow t=4$$

بما أن للمعادلات الثلاث الحل نفسه ($t=4$)، فإن القطعة التي متجه موقعها $39\hat{i} - 3\hat{j} + 14\hat{k}$ وهي النقطة $(39, -3, 14)$ تقع على المستقيم ا لأنها تنتج من تعويض $t=4$ في معادلته.

(b) أجد متجه الموقع للنقطة التي تقع على هذا المستقيم، وتقابل القيمة: $t = -3$.

$$t = -3 \Rightarrow \vec{r} = (11+7(-3))\hat{i} + (5-2(-3))\hat{j} + (-6+5(-3))\hat{k} = -10\hat{i} + 11\hat{j} - 21\hat{k}$$

(c) إذا كانت النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ تقع على المستقيم ا، فما قيمة v ؟

متجه الموقع للنقطة $(v, -3v, 5v-1)$ هو $v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k}$

$$v\hat{i} - 3v\hat{j} + (5v-1)\hat{k} = (11+7t)\hat{i} + (5-2t)\hat{j} + (-6+5t)\hat{k} \Rightarrow v = 11+7t \dots$$

$$\dots (1) -3v = 5-2t \dots (2) 5v-1 = -6+5t \dots (3) (1) \times 3 + (2) \Rightarrow 0 = 38 + 19t \Rightarrow t = -2 \Rightarrow v = -3$$

تتحقق من أن $v = -3, t = -2$ تحققان المعادلة (3)

$$16 - = 16 - (2 -)6 + 5 - = 1 - (3 -)5$$

إذن، قيمة v التي تجعل النقطة $(v, -3v, 5v-1)$ واقعة على المستقيم ا هي: $v = -3$

المستقيمات المتوازية والمتقاطعة والمتخالفة

أتحقق من فهمي صفحة (136):

إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle + t \langle 1, 11, -12 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 ، وكانت: $\vec{r} = \langle -30, -6, 30 \rangle + u \langle 4, -6, 3 \rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 ، فأحدد إذا كان المستقيمان: l_1, l_2 متوازيين، أو متقاطعين، أو متخالفين، ثم أجد إحداثيات نقطة تقاطعهما إذا كانا متقاطعين.

اتجاه المستقيم l_1 هو $\vec{v}_1 = \langle 1, 11, -12 \rangle$

اتجاه المستقيم l_2 هو $\vec{v}_2 = \langle 4, -6, 3 \rangle$

وبما أنه لا يوجد عدد حقيقي k بحيث $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ فإن المستقيمين غير متوازيين.

نساوي $\vec{r}$ من معادلتَي المستقيمين:

$$\begin{aligned} t \langle 1, 11, -12 \rangle &= \langle -30, -6, 30 \rangle + u \langle 4, -6, 3 \rangle \\ t &= -30 + 4u \Rightarrow t - 4u = -30 \quad (1) \\ 11t &= -6 - 6u \Rightarrow 11t + 6u = -6 \quad (2) \\ -12t &= 30 + 3u \Rightarrow 12t + 3u = -39 \quad (3) \end{aligned}$$

نتحقق من أن $u=7, t=-5$ تحققان المعادلة (3)

$$39 - = 39 - 39 - ? = (7)3 + (-5)12$$

بما أن قيمة t وقيمة u حققنا المعادلات الثلاث، فإن المستقيمين متقاطعان.

لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t=-5$ في معادلة l_1 :

$$\vec{r} = \langle 3, 7, -9 \rangle - 5 \langle 1, 11, -12 \rangle = \langle -2, -48, 51 \rangle$$

إذن، يتقاطع المستقيمان في النقطة $(-2, -48, 51)$

أتحقق من فهمي صفحة (138):

عرض جوي: أقلعت طائرة من موقع إحداثياته: $(0, 7, 0)$. وفي الوقت نفسه، أقلعت

طائرة ثانية من موقع إحداثياته: $(-2, 0, 0)$. وبعد التحليق مدة قصيرة في مسارين مستقيمين، أصبحت الطائرة الأولى عند الموقع الذي إحداثياته: $(8, 15, 16)$ ، وأصبحت الطائرة الثانية عند الموقع الذي إحداثياته: $(22, 24, 48)$. هل خطا سير الطائرتين متوازيان، أم متقاطعان، أم متخالفان؟

اتجاه الطائرة الأولى هو اتجاه الطائرة الأولى هو
 $\vec{v} \rightarrow 1 = \langle 8 - 0, 15 - 0, 16 - 0 \rangle = \langle 8, 15, 16 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 8 ليصبح: $\langle 1, 1, 2 \rangle$

معادلة مسار الأولى: $\vec{r} \rightarrow = \langle 0, 7, 0 \rangle + t \langle 1, 1, 2 \rangle$

اتجاه الثانية هو $\vec{v} \rightarrow 2 = \langle 22 - (-2), 24 - 0, 48 - 0 \rangle = \langle 24, 24, 48 \rangle$

ويمكن تبسيطه بالقسمة على 24 دون تغيير اتجاهه ليصبح: $\langle 1, 1, 2 \rangle$

معادلة مسار الثانية: $\vec{r} \rightarrow = \langle -2, 0, 0 \rangle + u \langle 1, 1, 2 \rangle$

نلاحظ أن المسارين متوازيان لأن لهما الاتجاه نفسه.