مهارات التفكير العليا

المتجهات في الفضاء

(41) أكتشف الخطأ: قالت حنان: "إذا كانت النقطة $A(7,-3,3)$ تقع على كرة مركزها نقطة الأصل، فإن النقطة $B(2,-8,-1)$ تقع خارج هذه الكرة"، في حين قالت هديل: "النقطة B تقع داخل هذه الكرة"، أيّ القولين صحيح، مبرراً إجابتي.

بما أن مركز الكرة هو $O(0,0,0)$ والنقطة $A(7,-3,3)$ تقع عليه فإن طول نصف قطرها R حيث:

$$R=OA=(7-0)2+(-3-0)2+(3-0)2=49+9+OB=(2-0)2+(-8-0)2+(-1-0)2=4+64+1$$

بما أن $OB>R$ فإن النقطة B تقع خارج الكرة، ويكون قول حنان هو الصواب.

(42) تبرير: إذا وقعت النقطة $J(-4,6,-1)$ والنقطة $K(-2,2,17)$ على طرفي أحد أقطار كرة، فأبين أن النقطة $L(2,10,3)$ والنقطة $J(4,-2,7)$ تقعان على سطح تلك الكرة، مبرراً إجابتي.

مركز الكرة هو النقطة C التي تنصف القطر المعطى طرفاه:

$$(C=(-4-22,6+22,-1+172)=(-3,4,8$$

وطول نصف قطر الكرة هو R حيث:

$$R=CK=(-3-(-2))2+(4-2)2+(8-17)2=1+4+81=86$$

الآن نجد كلاً من CJ,CL ونقارنه مع R لمعرفة موقع كل من J,L بالنسبة لهذه الكرة:

$$CL=(2-(-3)2+(10-4)2+(3-8)2=25+36+25=86=R$$

إذن، النقطة L أيضاً تقع على سطح هذه الكرة.

$$CJ=(4-(-3))2+(-2-4)2+(7-8)2=49+36+1=86=R$$

إذن، النقطة J أيضاً تقع على سطح هذه الكرة.

(43) تبرير: تمثل النقاط: $A(2,3,-1),B(2,3,5),C(8,-3,5$ ثلاثة من رؤوس مكعب

خشبي، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات: xy,xz,yz.

أكتب إحداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى، مبرراً إجابتي.

تختلف النقطة B عن النقطة A فقط في الإحداثي z، والفرق بين قيمتي z يساوي 6

إذن، AB أحد أحرف المكعب، وطول ضلع المكعب 6 وحدات.

أما النقطة C فيزيد إحداثيها x بمقدار 6 وحدات عن الإحداثي x للنقطة B، كما يقل إحداثيها y بمقدار 6 عن الإحداثي y للنقطة B (مزاحة عنها 6 وحدات لليسار).

نجد باقي النقاط (الرؤوس) بإحداث إزاحات مقدارها 6 وحدات لإحداثيات الرؤوس الثلاثة المعطاة.

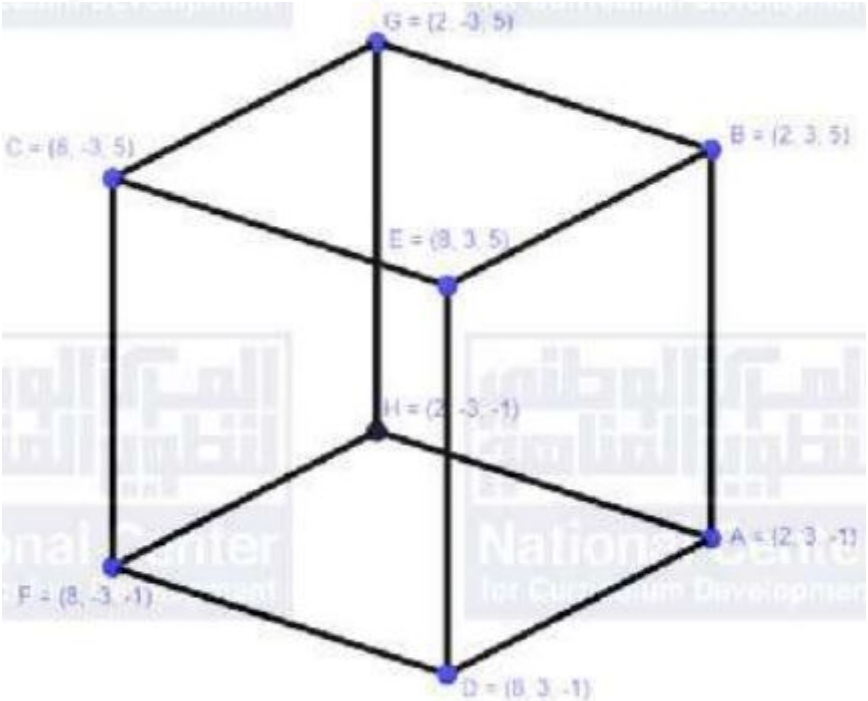
D(8,3,−1) وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

E(8,3,5) وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور x الموجب.

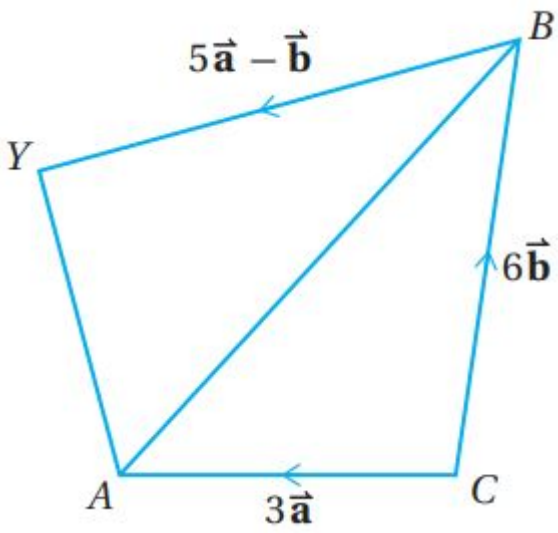
F(8,−3,−1) وذلك بإزاحة النقطة C بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور z السالب.

G(2,−3,5) وذلك بإزاحة النقطة B بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.

H(2,−3,−1) وذلك بإزاحة النقطة A بمقدار 6 وحدات باتجاه المحور y السالب.



(44) تحـــد: في الشكـــل الآتـــي، إذا كـــان: $\vec{CA}=3\vec{a}, \vec{BY}=5\vec{a}-\vec{b}, \vec{CB}=6\vec{b}$، وكـانت X تقـع علـى $\overline{AB}$، حيـث $AX:XB=1:2$، فأثبت أن: $\vec{CX}=25\vec{CY}$.



$AXXB=12\Rightarrow XB=2AX\Rightarrow AB=AX+XB=AX+2AX=3AX\Rightarrow AX=13ABAX\rightarrow=13AB\rightarrow=13(AC\rightarrow+CB\rightarrow)=13(-3a\rightarrow+6b\rightarrow)=-a\rightarrow+2b\rightarrow CY\rightarrow=CB\rightarrow+BY\rightarrow=6b\rightarrow+5a\rightarrow-b\rightarrow=5(a\rightarrow+b\rightarrow)\Rightarrow a\rightarrow+b\rightarrow=15CY\rightarrow CX\rightarrow=CA\rightarrow+AX\rightarrow=3a\rightarrow\rightarrow-a\rightarrow+2b\rightarrow=2(a\rightarrow+b\rightarrow)=25CY$

تحد: إذا كانت متجهات الموقع للنقاط: M,L,N هي:

$\hat{m}\rightarrow=-3\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}, \hat{l}\rightarrow=4\hat{i}-10\hat{j}+3\hat{k}, \hat{n}\rightarrow=5\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً:

(45) أثبت أن المثلث LMN قائم الزاوية.

$LN\rightarrow=\langle 1,13,-12\rangle LN=|LN\rightarrow|=1+169+144=314ML\rightarrow=\langle 7,-4,2\rangle ML=|ML\rightarrow|=49+16+4=69NM\rightarrow=\langle -8,-9,10\rangle NM=|NM\rightarrow|=64+81+100=245$

بما أن: $(LN)2=(ML)2+(NM)2$ إذن: $314=69+245$

فإن $\triangle LMN$ قائم الزاوية في M (بعكس نظرية فيثاغورس).

(46) أجد مساحة المثلث LMN.

مساحة المثلث في A حيث:

$A=12(ML)(NM)=1269245=72345$