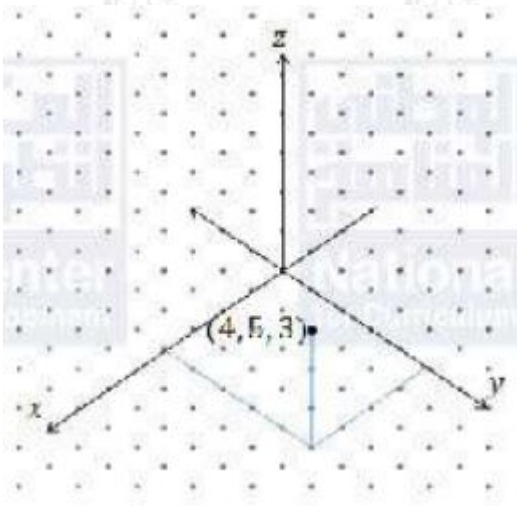


أدرب وأحل المسائل

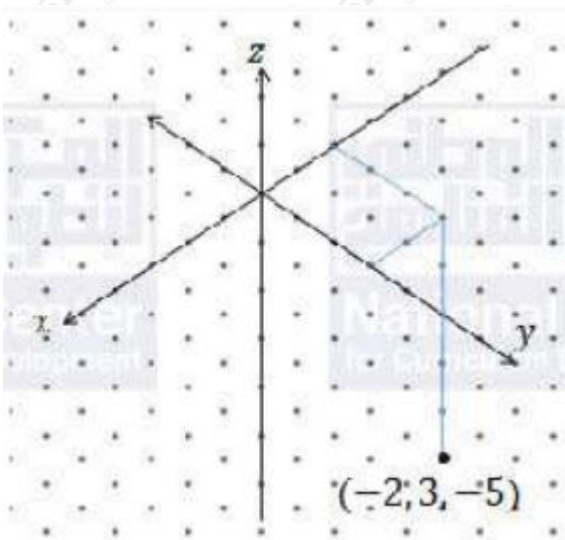
المتجهات في الفضاء

أعین کلاً من النقاط الآتية في نظام الإحداثيات ثلاثي الأبعاد:

(1) $(4, 5, 3)$

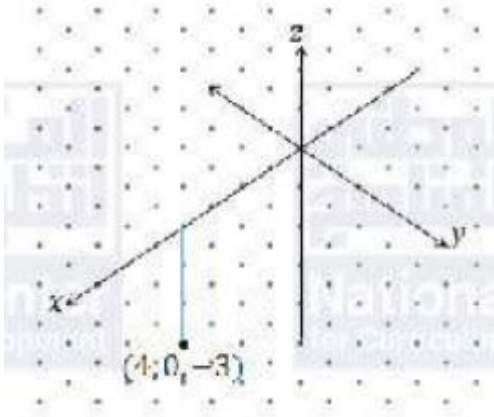


(2) $(-2, 3, -5)$



(3) $(3, -4, 0)$





أجد الطول وإحداثيات نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة التي أعطي طرفاها في كل مما يأتي:

(4) $(5, 4, 2), (2, 8, -3)$

$$A(3, -2, 8), B(5, 4, 2) \quad AB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 2^2 + 6^2 + (-6)^2 = 76 = 219$$

$$N = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (3 + 5, -2 + 4, 8 + 2) = (8, 2, 10)$$

(5) $(5, 3, -2), (2, 7, 0)$

$$A(-2, 7, 0), B(2, -5, 3) \quad AB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 16 + 144 + 9 = 169 = 13$$

$$N = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (-2 + 2, 7 - 5, 0 + 3) = (0, 2, 3)$$

(6) $(3, 6, 7), (5, -12, 8)$

$$A(12, 8, -5), B(-3, 6, 7) \quad AB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 225 + 4 + 144 = 373$$

$$N = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (12 - 3, 8 + 6, -5 + 7) = (9, 14, 2)$$

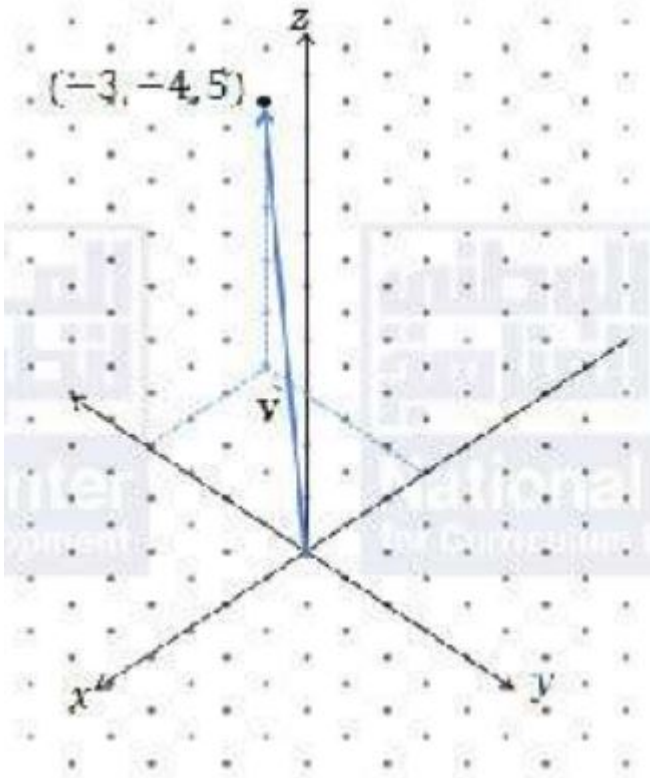
(7) $(6, -3, 2), (8, 4, -5)$

$$A(-5, -8, 4), B(3, 2, -6) \quad AB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 64 + 100 + 100 = 264 = 266$$

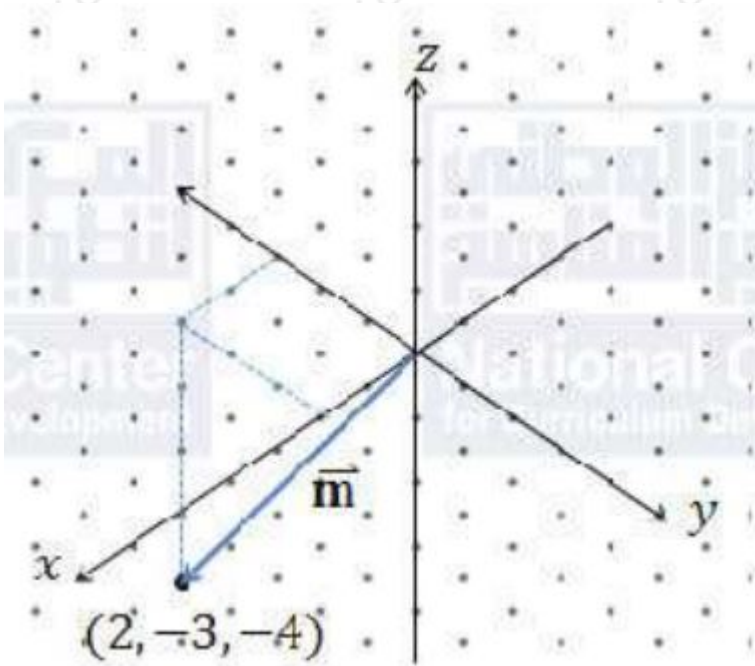
$$N = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) = (-5 + 3, -8 + 2, 4 - 6) = (-2, -6, -2)$$

أمثل كلاً من المتجهات الآتية بيانياً في الفضاء:

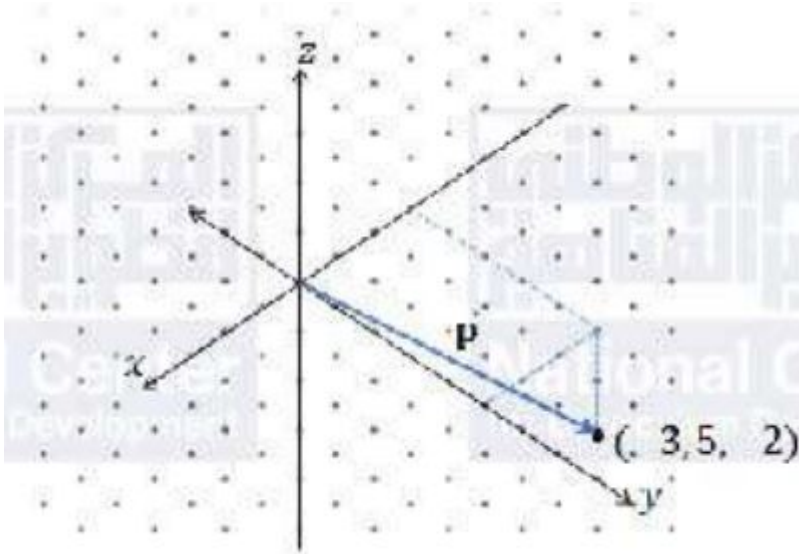
$$(\vec{v} = \langle -3, -4, 5 \rangle) \quad (8)$$



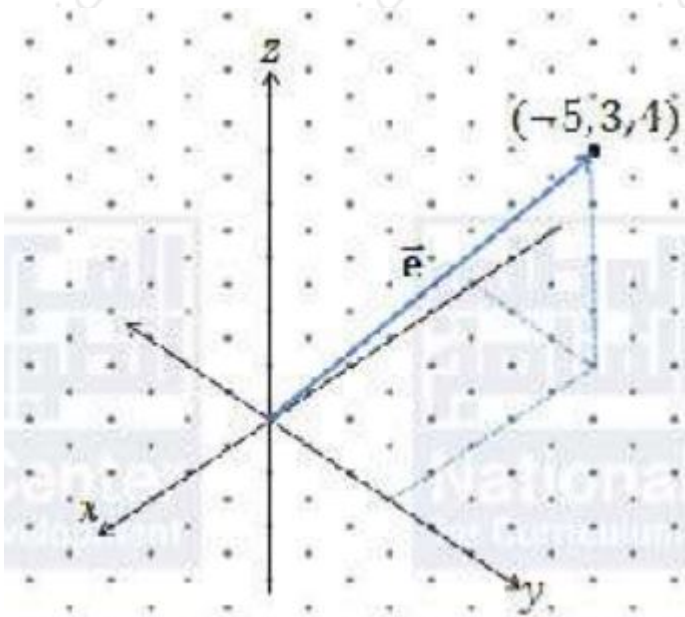
$$(\vec{m} = \langle 2, -3, -4 \rangle) \quad (9)$$



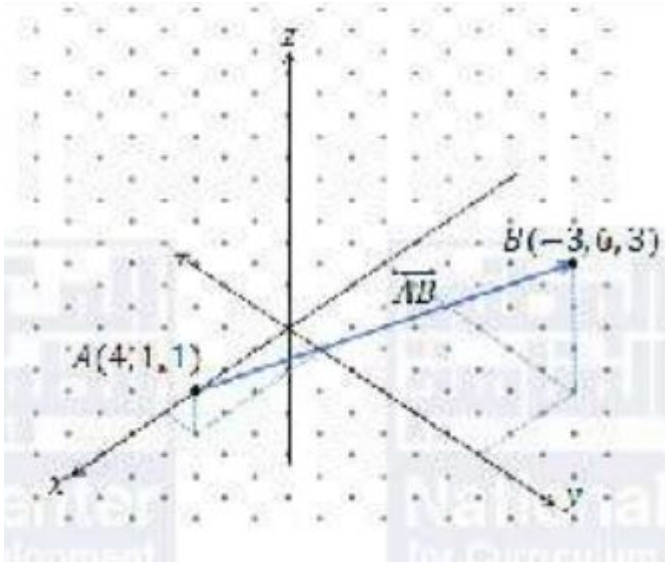
$$(\vec{p} = \langle -3, 5, -2 \rangle) \quad (10)$$



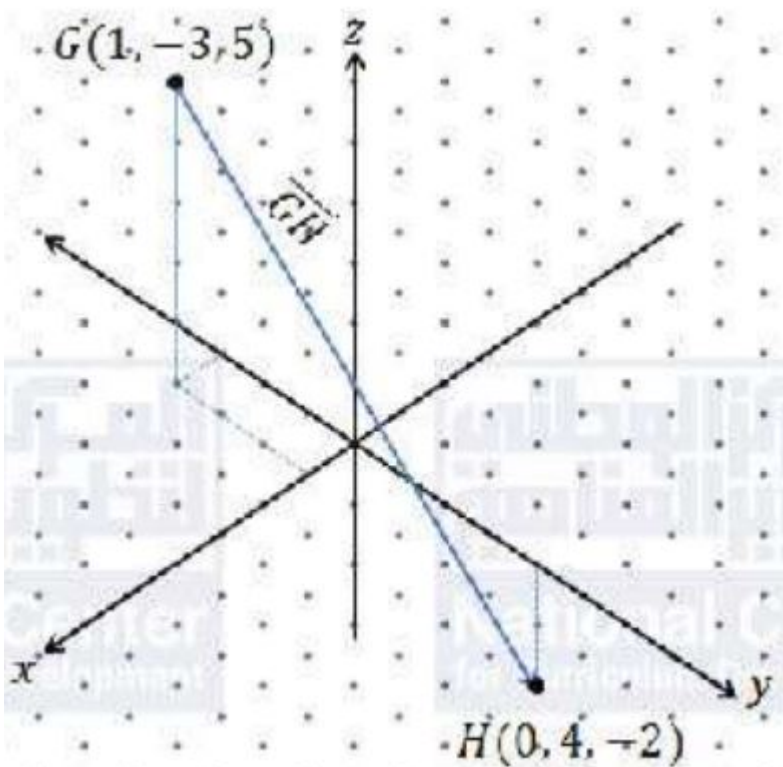
$$(\vec{e} = -5\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k} \quad (11)$$



$$(\vec{AB}: A(4, 1, 1), B(-3, 6, 3) \quad (12)$$



(GH→:G(1,-3,5),H(0,4,-2) (13



أجد الصورة الإحداثية والمقدار للمتجه $\vec{AB}$ الذي أعطيت نقطة بدايته ونقطة نهايته في كل مما يأتي:

(A(4,6,9),B(-3,2,5) (14

$$\vec{AB} = \langle -3-4, 2-6, 5-9 \rangle = \langle -7, -4, -4 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{49 + 16 + 16} = \sqrt{81} = 9$$

$$(A(-8,5,7), B(6,3,2)) \quad (15)$$

$$\vec{AB} = \langle 6 - (-8), 3 - 5, 2 - 7 \rangle = \langle 14, -2, -5 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{14^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{196 + 4 + 25} = \sqrt{225} = 15$$

$$(A(12,-5,4), B(4,1,-1)) \quad (16)$$

$$\vec{AB} = \langle 4 - 12, 1 - (-5), -1 - 4 \rangle = \langle -8, 6, -5 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + (-5)^2} = \sqrt{64 + 36 + 25} = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$$

$$(A(24,-8,10), B(10,6,3)) \quad (17)$$

$$\vec{AB} = \langle 10 - 24, 6 - (-8), 3 - 10 \rangle = \langle -14, 14, -7 \rangle \quad |\vec{AB}| = \sqrt{(-14)^2 + 14^2 + (-7)^2} = \sqrt{196 + 196 + 49} = \sqrt{441} = 21$$

(18) إذا كان OAB مثلثاً فيه: $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{AB} = \vec{b}$, والنقطة C هي منتصف $\vec{AB}$, فأكتب المتجه $\vec{OC}$ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{b}$.

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

إذا كان: $\vec{e} = \langle -3, 9, -4 \rangle$, $\vec{f} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 7\hat{k}$, $\vec{g} = \langle -1, 8, -5 \rangle$, فأوجد كلاً مما يأتي:

$$3\vec{e} + 4\vec{f} \quad (19)$$

$$3\vec{e} + 4\vec{f} = 3\langle -3, 9, -4 \rangle + 4\langle 5, -3, 7 \rangle = \langle -9, 27, -12 \rangle + \langle 20, -12, 28 \rangle = \langle 11, 15, 16 \rangle$$

$$\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} \quad (20)$$

$$\vec{e} + \vec{f} - 3\vec{g} = \langle -3, 9, -4 \rangle + \langle 5, -3, 7 \rangle - 3\langle -1, 8, -5 \rangle = \langle 5, -18, 18 \rangle$$

$$4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} \quad (21)$$

$$4\vec{e} - 2\vec{f} + 3\vec{g} = 4\langle -3, 9, -4 \rangle - 2\langle 5, -3, 7 \rangle + 3\langle -1, 8, -5 \rangle = \langle -25, 66, -45 \rangle$$

$$2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} \quad (22)$$

$$\langle 2\vec{e} + 7\vec{f} - 2\vec{g} \rangle = 2\langle -3, 9, -4 \rangle + 7\langle 5, -3, 7 \rangle - 2\langle -1, 8, -5 \rangle = \langle 31, -19, 51 \rangle$$

إذا كانت: $A(-1, 6, 5), B(0, 1, -4), C(2, 1, 1)$ نقاطاً في الفضاء، فأجد كلاً مما يأتي:

(23) متجه موقع كل من النقاط: A و B و C.

$$\langle \vec{OA} \rangle = \langle -1, 6, 5 \rangle, \langle \vec{OB} \rangle = \langle 0, 1, -4 \rangle, \langle \vec{OC} \rangle = \langle 2, 1, 1 \rangle$$

(24) متجه الإزاحة من النقطة B إلى النقطة A.

$$\langle \vec{BA} \rangle = \langle \vec{OA} \rangle - \langle \vec{OB} \rangle = \langle -1, 6, 5 \rangle - \langle 0, 1, -4 \rangle = \langle -1, 5, 9 \rangle$$

(25) متجه الإزاحة من النقطة C إلى النقطة B.

$$\langle \vec{CB} \rangle = \langle \vec{OB} \rangle - \langle \vec{OC} \rangle = \langle 0, 1, -4 \rangle - \langle 2, 1, 1 \rangle = \langle -2, 0, -5 \rangle$$

(26) المسافة بين النقطة C والنقطة B.

$$|\vec{BC}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{4 + 0 + 25} = \sqrt{29}$$

أكتب كلاً من المتجهات الآتية بدلالة متجهات الوحدة الأساسية:

$$\langle \vec{g} \rangle = \langle 5, 7, -1 \rangle \quad (27)$$

$$\vec{g} = 5\hat{i} + 7\hat{j} - \hat{k}$$

$$\langle \vec{ST} \rangle: S(1, 0, -5), T(2, -2, 0) \quad (28)$$

$$\vec{ST} = (2-1)\hat{i} + (-2-0)\hat{j} + (0-(-5))\hat{k} = \hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$$

$$\langle \vec{a} + 3\vec{b} \rangle: \langle \vec{a} \rangle = \hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}, \langle \vec{b} \rangle = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k} \quad (29)$$

$$\langle \vec{a} + 3\vec{b} \rangle = -\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k} + 12\hat{i} - 9\hat{j} + 15\hat{k} = 11\hat{i} - 11\hat{j} + 19\hat{k}$$

أجد متجه وحدة في اتجاه كل متجه مما يأتي:

$$4\hat{i} + 3\hat{j} \quad (30)$$

$$\vec{v} = -4\hat{i} + 3\hat{j} \quad |\vec{v}| = \sqrt{16 + 9} = 5 \quad \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-4\hat{i} + 3\hat{j}}{5}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\vec{v}$

$$(143\mathbf{i}^{\wedge}-24\mathbf{j}^{\wedge} \quad (31$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = 143\mathbf{i}^{\wedge} - 24\mathbf{j}^{\wedge} \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = 20449 + 576 = 21025 = 145\mathbf{v}^{\wedge} = 1145\mathbf{v} \rightarrow = 1431\mathbf{i}^{\wedge} - 24145\mathbf{j}^{\wedge}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(72\mathbf{i}^{\wedge} + 33\mathbf{j}^{\wedge} + 56\mathbf{k}^{\wedge} \quad (32 -$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = -72\mathbf{i}^{\wedge} + 33\mathbf{j}^{\wedge} + 56\mathbf{k}^{\wedge} \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = 5184 + 1089 + 3136 = 9409 = 97\mathbf{v}^{\wedge} = 197\mathbf{i}^{\wedge} - 7297\mathbf{j}^{\wedge} + 3397\mathbf{k}^{\wedge}$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(33) \quad (11138)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = (11138) \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = 121 + 169 + 64 = 354\mathbf{v}^{\wedge} = 1354\mathbf{v} \rightarrow = (113541335483 \quad (54$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(34) \quad (5-4-2)$$

$$\mathbf{v} \rightarrow = (5-4-2) \quad |\mathbf{v} \rightarrow| = 25 + 16 + 4 = 45 = 35\mathbf{v}^{\wedge} = 135\mathbf{v} \rightarrow = (535-435-235$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{v} \rightarrow$

$$(n \rightarrow = \langle -2, 0, 3 \rangle \quad (35$$

$$|n \rightarrow| = 4 + 0 + 9 = 13\mathbf{n}^{\wedge} = 113\mathbf{n} \rightarrow = \langle -213, 0, 313$$

وهذا هو متجه الوحدة في اتجاه $\mathbf{n} \rightarrow$

$$(36) \quad \text{إذا كان: } \mathbf{a} \rightarrow = -3\mathbf{i}^{\wedge} + 4\mathbf{j}^{\wedge} + 12\mathbf{k}^{\wedge}, \mathbf{b} \rightarrow = 7\mathbf{i}^{\wedge} + 39\mathbf{j}^{\wedge} - 2\mathbf{k}^{\wedge}, \text{ فأجد قيمة } c.$$

$$3\mathbf{a} \rightarrow + c\mathbf{b} \rightarrow = 3(-3\mathbf{i}^{\wedge} + 4\mathbf{j}^{\wedge} + 12\mathbf{k}^{\wedge}) + c(7\mathbf{i}^{\wedge} + 39\mathbf{j}^{\wedge} - 2\mathbf{k}^{\wedge}) = (-9 + 7c)\mathbf{i}^{\wedge} + (12 + 39c)\mathbf{j}^{\wedge} + (36 - 2c)\mathbf{k}^{\wedge} = -23\mathbf{i}^{\wedge} - 66\mathbf{j}^{\wedge} + 40\mathbf{k}^{\wedge} = (-9 + 7c)\mathbf{i}^{\wedge} + (12 + 39c)\mathbf{j}^{\wedge} + (36 - 2c)\mathbf{k}^{\wedge}$$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$$9+7c=-23, 12+39c=-66, 36-2c=40$$

وعند حل هذه المعادلات نجد أن لها الحل نفسه $c=-2$

(37) إذا كان: $t \rightarrow = (3v, 2)$, $s \rightarrow = (2w+47, -4)$ ، وكان: $ks \rightarrow -4t \rightarrow = (63, 1w)$ ، فأجد قيمة كل من v و w و k .

$$ks \rightarrow -4t \rightarrow = k(2w+47, -4) - 4(3v, 2) = (2k-12k, k(w+47)-4v-4k-8) \Rightarrow (63, 1w) = (2k-12k, k(w+47)-4v-4k-8) \Rightarrow 2k-12k=6 \Rightarrow k=9$$

$$-4k-8=w \Rightarrow w=-36$$

$$-8=-44k(w+47)-4v=31 \Rightarrow 9(-44+47)-4v=31 \Rightarrow v=-1$$

(38) إذا كان:

$m \rightarrow = \langle 4, 1, -2 \rangle$, $n \rightarrow = \langle 6, 2, -3 \rangle$, $p \rightarrow = \langle 2, a, -1 \rangle$, $5m \rightarrow + 2p \rightarrow = 4n \rightarrow$ ، فما قيمة الثابت a ؟

$$5m \rightarrow + 2p \rightarrow = 4n \rightarrow \Rightarrow 5\langle 4, 1, -2 \rangle + 2\langle 2, a, -1 \rangle = 4\langle 6, 2, -3 \rangle \Rightarrow \langle 24, 5+2a, -12 \rangle = \langle 24, 8, -12 \rangle$$

في هذه المعادلة يتساوى المتجهان، إذن، فإن إحداثياتهما المتناظرة متساوية:

$$5+2a=8 \Rightarrow a=3/2$$

(39) إذا كان: $v \rightarrow = \langle u-3, u+1, u-2 \rangle$ ، وكان: $|v \rightarrow| = 17$ ، فما قيمة u ؟

$$|v \rightarrow| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{(u-3)^2 + (u+1)^2 + (u-2)^2} = 17$$

$$u^2 - 6u + 9 + u^2 + 2u + 1 + u^2 - 4u + 4 = 289 \Rightarrow 3u^2 - 8u - 275 = 0 \Rightarrow u = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 4 \cdot 3 \cdot 275}}{6} = \frac{8 \pm 58}{6}$$

$$u = 11 \text{ أو } u = -25$$

(40) إذا كان متجهها الموقع للنقطة G والنقطة H هما:

$g \rightarrow = \langle -2, c+1, -8 \rangle$ و $h \rightarrow = \langle c-1, -4, c+2 \rangle$ ، على الترتيب، فأجد قيمة c ، علماً بأن: $|GH \rightarrow| = 19$ ، وأن: $c > 0$.

$$GH \rightarrow = \langle c-1-(-2), -4-(c+1), c+2-(-8) \rangle = \langle c+1, -5-c, c+10 \rangle$$

$$|GH \rightarrow| = \sqrt{(c+1)^2 + (-5-c)^2 + (c+10)^2} = 19$$

$$c^2 + 2c + 1 + c^2 + 10c + 25 + c^2 + 20c + 100 = 361 \Rightarrow 3c^2 + 32c - 235 = 0 \Rightarrow c = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 + 4 \cdot 3 \cdot 235}}{6} = \frac{-32 \pm 62}{6}$$

$$c = 5 \text{ أو } c = -47$$

ولكن $c > 0$ إذن، $c = 5$