

أتدرب وأحل المسائل

المعادلات التفاضلية

أحدد إذا كان الاقتران المعطى حلاً للمعادلة التفاضلية في كل مما يأتي:

$$(y=x; xy'-y=0) \quad (1)$$

$$y'=12x \quad xy'-y=x12x-x=12x-x=-12x \neq 0$$

إذن، $y=x$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'-y=0$

$$(x-5x+7; y''-1x=0) \quad (2) \quad y=x \ln$$

$$x-4y''=1 \quad xy''-1x=1x-1x=0 \quad x-5=\ln y' = x(1x) + \ln$$

إذن، $x-5x+7y=x \ln$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y''-1x=0$

$$(x; y'+y^2=1) \quad (3) \quad y=\tan$$

$$x \neq 1 \quad x=1+2 \tan^2 x + \tan^2 x y' + y^2 = \sec^2 y' = \sec^2$$

إذن، $xy=\tan$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $y'+y^2=1$

$$(y=e^x+3x e^x; y''-2y'+y=0) \quad (4)$$

$$y'=e^x+3x e^x+3e^x=4e^x+3x e^x \quad y''=4e^x+3x e^x+3e^x=7e^x+3x e^x$$

$$y''-2y'+y=7e^x+3x e^x-8e^x-6x e^x+e^x+3x e^x=0$$

إذن، $y=e^x+3x e^x$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y''-2y'+y=0$

أحل كلاً من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dydx=3xy) \quad (5)$$

$$dydx=3xy \quad dy=3xdx \Rightarrow \int dy = \int 3xdx \Rightarrow \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$(dydx+3xy^2=0) \quad (6)$$

$$dydx=-3xy^2 \Rightarrow y^2 dy = -3xdx \Rightarrow \int y^2 dy = \int -3xdx \Rightarrow \frac{1}{3}y^3 = -\frac{3}{2}x^2 + C$$

$$(y (7x \sin y dx = \cos$$

$$y dy = \int \csc x dx \int \csc y dy = \int \cos x dx \Rightarrow \int \csc y = \cos y dx dy \sin x \sin y dx = \cos y dy = - \int -(\csc^2 y + \cot y \csc y \cot y + \csc y dy = \int \csc^2 y + \cot y \csc y + \cot x \csc x + C y = \sin y + \cot | \csc y | \Rightarrow -\ln y + \cot | \csc y dy = -\ln y + \cot y) \csc y \cot y + \csc$$

$$(dy dx = x(x^2 + 1)^2 (8$$

$$dy = x(x^2 + 1)^2 dx \int dy = \int x(x^2 + 1)^2 dx u = x^2 + 1 \Rightarrow dx = du 2x \Rightarrow \int x(x^2 + 1)^2 dx = \int x u^2 du 2x = 12 \int 1 u^2 du = -12 u + C = -12(x^2 + 1) + C \Rightarrow \int dy = \int x(x^2 + 1)^2 dx \Rightarrow y = -12(x^2 + 1) + C$$

$$(dy dx = x e^x + y (9$$

$$dy dx = x e^x e^y \Rightarrow dy e^y = x e^x dx \int dy e^y = \int x e^x dx \Rightarrow \int e^{-y} dy = \int x e^x dx \Rightarrow -e^{-y} = u = x dv = e^x dx du = dx v = e^x \Rightarrow \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

نستخدم الأجزاء

$$= x e^x - e^x + C \Rightarrow -e^{-y} = x e^x - e^x + C$$

$$(e^{-1/x} dy dx = x - 2y^2 (10$$

$$dy^2 = x - 2e^{-1/x} dx = e^{1/x} x^2 dx \int y - 2 dy = \int e^{1/x} x^2 dx \Rightarrow -y - 1 = \int e^{1/x} x^2 dx u = 1/x \Rightarrow du dx = -1/x^2 \Rightarrow dx = -x^2 du \Rightarrow \int e^{1/x} x^2 dx = \int e^u x^2 x - x$$

نعويض

$$2 du = \int -e^u du = -e^u + C = -e^{1/x} + C - y - 1 = \int e^{1/x} x^2 dx \Rightarrow 1/y = e^{1/x} + C$$

$$(dy dx = x y x - 3 (11$$

$$|x - 3| + C |y| = x + 3 \ln dy y = x x - 3 dx \int dy y = \int x x - 3 dx \int dy y = \int (1 + 3x - 3) dx \ln$$

$$(y x^3 + 2 (12 dy dx = 3x^2 \sin^2$$

$$y dy = \int 3x^2 x^3 + 2 y = \int 3x^2 (x^3 + 2) dx \int \csc^2 y = 3x^2 (x^3 + 2) dx \int dy \sin^2 dy \sin^2 |x^3 + 2| + C y = \ln x - \cot$$

$$(x (13 dy dx = y^3 \ln$$

$$x x dv = dx du = dx x v = x \int \ln u = \ln$$

نستخدم الأجزاء

$$x dx x dx \int dy y^3 = \int \ln dy y^3 = \ln x - x + C x dx \Rightarrow -12y - 2 = x \ln x - x + C \Rightarrow \int y - 3 dy = \int \ln x - \int x dx x = x \ln x = x \ln$$

$$(dy/dx = 2x^3(y^2 - 1)) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 1/y^2 - 1 &= 1/(y-1) \text{ (نستخدم الكسور الجزئية)} \\ dy/y^2 - 1 &= 2x^3 dx \int dy/y^2 - 1 = \int 2x^3 dx \\ (y+1) &= Ay - 1 + By + 1 \quad A(y+1) + B(y-1) = 1 \\ y=1 &\Rightarrow A=1 \\ y=-1 &\Rightarrow B=-1 \\ \Rightarrow 1/y^2 - 1 &= 1/y - 1 + -1/y + 1 \Rightarrow \int dy/y^2 - 1 = \int 2x^3 dx \Rightarrow \int (1/y - 1 + -1/y + 1) dy = \\ |y+1| &= 12x^4 + C |y-1| - 12 \ln |2x^3 dx| \Rightarrow 12 \ln \end{aligned}$$

$$(x^{15} \cos^2 y \, dy/dx = \sin^3)$$

$$\begin{aligned} x \Rightarrow dx = u = \cos \text{ (نستخدم التعويض)} \\ x dx \cos^2 x dx \int y dy &= \int \sin^3 x \cos^2 y dy = \sin^3 \\ x u^2 du &= \int (-1 + \cos x = \int -\sin^2 x u^2 du - \sin x dx = \int \sin^3 x \cos^2 x \int \sin^3 du - \sin \\ x - 1 x) u^2 du &= \int (-1 + u^2) u^2 du = \int (u^4 - u^2) du = 15u^5 - 13u^3 + C = 15 \cos^5 2 \\ x + C x - 13 \cos^3 x dx &\Rightarrow 12y^2 = 15 \cos^5 x \cos^2 x + C \Rightarrow \int y dy = \int \sin^3 3 \cos^3 \end{aligned}$$

$$(dy/dx = xy) \quad (16)$$

$$dy/y = x dx \int dy/y = \int x dx \int y - 12 dy = \int x^{12} dx \quad 2y^{12} = 23x^{32} + C$$

$$(x^{17} dy/dx = y \ln)$$

$$\begin{aligned} x dv = u = \ln \text{ (نستخدم الأجزاء)} \\ x dx x^{12} dx \int dy/y &= \int 12 \ln x x^{12} dx \int dy/y = \int \ln dy = \ln \\ x - 1 x dx &= 12 x \ln x - x + C \Rightarrow \int 12 \ln x - \int x dx = x \ln x dx = x \ln x du = dx x v = x \int \ln \\ x - 12 x + C |y| &= 12 x \ln x dx \Rightarrow \ln^2 x + C \int dy/y = \int 12 \ln \end{aligned}$$

$$(2x+1)(x+2) dy/dx = -3(y-2) \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \text{الجزئية الكسور} \\ (2x+1)(x+2) dy &= -3(y-2) dx \int -13 dy/y - 2 = \int dx (2x+1)(x+2) \\ 2x+1)(x+2) &= A2x+1 + Bx+2 \quad A(x+2) + B(2x+1) = 1 \\ x=-12 &\Rightarrow 1 \text{ (نستخدم)} \\ A=23x=-2 &\Rightarrow B=-13 \Rightarrow 1(2x+1)(x+2) = 232x+1 + -13x+2 \Rightarrow \int -13 dy/y - \\ |y-|x+2| &+ C \Rightarrow -\ln|2x+1| - 13 \ln|y-2| = 13 \ln 2 = \int dx (2x+1)(x+2) \Rightarrow -13 \ln \\ |2x+1x+2| &+ C |y-2| = \ln|x+2| + C \Rightarrow -\ln|2x+1| - \ln 2 = \ln \end{aligned}$$

أجد الحل الخاص الذي يحقق الشرط الأولي المعطى لكل من المعادلات التفاضلية الآتية:

$$(dy/dx = y^{24-x}; y(1) = 2) \quad (19)$$

بتعويض $C=23-12$ ($1, 2+23-12=12$)
 $y = -23(4-x) + 23 - 12$
 ص الحل

$2x)dx + 12x dx + y dy = \int (1 - \cos x) dx + \int 2 \sin^2 x y dy = \int 2 \sin^2 x dy = 2 \sin^2 x y + C$
 الحل العام $2x + Cy^2 = x - 12 \sin$

$$y dx dx \int \sec^2 y = \int 2 \cos^2 x dx \int dy \cos^2 y = 2 \cos^2 y dy \cos^2 x \cos^2 dy dx = 2 \cos^2$$

$x \Rightarrow du = \sin x dx$ استخدم التعويض $\int \cos x \sin x dx = \int \cos u du = -\frac{1}{2} \sin^2 u + C = -\frac{1}{2} \sin^2 x + C$

$dydx=8x-18(3x-8)(x-2) \int dy = \int 8x-18(3x-8)(x-2)dx$
 $8x-18(3x-8)(x-2)=A3x-8+Bx-2A(x-2)+B(3x-8)=8x-18x$ استخدم
 $=2 \Rightarrow B=1x=83 \Rightarrow A=5 \Rightarrow 8x-18(3x-8)(x-2)=53x-8+1x-2 \Rightarrow \int dy = \int 8x$
 $|x-2||3x-8|+\ln-18(3x-8)(x-2)dx \Rightarrow y = \int (53x-8+1x-2)dx \Rightarrow y = 53\ln$
 $|x-2|+8|3x-8|+\ln y = 53\ln$ بتعويض $C \Rightarrow C=8 \quad 3,8+0+0=8$ العام الحل
 اص الحل

منہاجی

$C \Rightarrow$ بتعويض C $e, 1+1=2$ العام $|x|+C dydx=1xy f ydy = \int dx x^{12} y^2 = \ln$
الحل $|x|^{-12} - 12 - 121 zyz = \ln$

(25) تتحرك سيارة في مسار مستقيم، ويعطى تسارعها بالمعادلة التفاضلية:
 $dv/dt = 10 - 0.5v$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعتها المتجهة بالتر لكل ثانية، أجد
السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها، علماً بأن السيارة تحركت من
وضع السكون.

$|10 - 0.5v| = t + C \Rightarrow dv/dt = 10 - 0.5v$
 $dv(10 - 0.5v) = dt$
 $\int dv(10 - 0.5v) = \int dt$
 $10 \ln|10 - 0.5v| = t + C$
 $\ln|10 - 0.5v| = -t/20 + C$
العام $|10 - 0.5v| = e^{-t/20 + C}$
بتعويض $t=0, v=0$ $10 = e^{C}$
الحل $|10 - 0.5v| = 10e^{-t/20}$
الخاص $|10 - 0.5v| = 10e^{-t/20}$

إذن، يمكن نمذجة السرعة المتجهة للسيارة بعد t ثانية من بدء حركتها بالعلاقة
الآتية:

$$|10 - 0.5v| = 10e^{-t/20}$$



(26) ذئب: يمكن نمذجة معدل تغير عدد الذئاب في إحدى الغابات
بالمعادلة التفاضلية: $dN/dt = 260 - 0.4N$ ، حيث N عدد الذئاب في
الغابة بعد t سنة من بدء دراسة عليها. أجد عدد الذئاب في الغابة
بعد 3 سنوات من بدء الدراسة، علماً بأن عددها عند بدء الدراسة
هو 300 ذئب.

$dN/dt = 260 - 0.4N$
 $dN(260 - 0.4N) = dt$
 $\int dN(260 - 0.4N) = \int dt$
 $260 \ln|260 - 0.4N| = -0.2N + C$
العام $|260 - 0.4N| = e^{-0.2N/260 + C}$
الحل $|260 - 0.4N| = e^{-0.2N/260 + C}$
الخاص $|260 - 0.4N| = e^{-0.2N/260 + C}$

لا يمكن أن يكون $N=650$ لأن $\ln 0$ غير معرف ولأن $N=300$ عندما $t=0$ والاقتران
 $|N-650| = e^{-0.2N/260 + C}$ متصل فلا يمكن أن يكون N أكبر من 650، ولذا فإن $N > 0$ ويكون $|N-650|$
مسار $N-650$

$(350 - 650 - N) = \ln$ نعوض $t=3$ نجد $(350 - 650 - N) = 0.4t$
 $\ln|350 - 650 - N| = -0.4t$
 $|350 - 650 - N| = e^{-0.4t}$
 $350 - 650 - N = e^{-0.4t}$
 $N = 650 - 350e^{-0.4t}$
 $N \approx 545$

إذن، بعد ثلاث سنوات يكون عدد الذئاب في تلك الغابة 545 ذئباً تقريباً.

كرة: تنكمش كرة، ويتغير نصف قطرها بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة التفاضلية:
 $\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2$ ، حيث r طول نصف قطر الكرة بالسنتيمتر، و t الزمن بالثواني
بعد بدء انكماش الكرة:

(27) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد طول نصف قطر الكرة بعد t ثانية، علماً بأن
طول نصف الكرة الابتدائي هو 20 cm.

$$\frac{dr}{dt} = -0.0075r^2 \Rightarrow \int \frac{dr}{r^2} = \int -0.0075 dt \Rightarrow -\frac{1}{r} = -0.0075t + C$$

$$1r = 0.0075t + 120 \Rightarrow r = 201 + 0.15t \quad C \Rightarrow C = 120 \quad t = 0, r = 20$$

(28) بعد كم ثانية يصبح طول نصف قطر الكرة 10 cm؟

نضع $r = 10$ في المعادلة الناتجة:

$$201 + 0.15t \Rightarrow 0.1 = 1 + 0.15t \Rightarrow 2 = 1 + 0.15t \Rightarrow t = 10.15 \approx 6.67s = 10$$

إذن، يكون طول نصف قطر الكرة 10cm بعد 6.67 ثانية تقريباً بعد بدء انكماشها.

حشرات: يتغير عدد الحشرات في مجتمع للحشرات بمعدل يمكن نمذجته بالمعادلة
التفاضلية: $\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t)$ ، حيث n عدد الحشرات، و t الزمن بالأسابيع بعد
بدء ملاحظة الحشرات:

(29) أحل المعادلة التفاضلية لإيجاد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد t أسبوعاً،
علماً بأن عددها الابتدائي هو 400 حشرة.

$$\frac{dn}{dt} = 0.2n(0.2 - \cos t) \Rightarrow \int \frac{dn}{n} = \int 0.2(0.2 - \cos t) dt \Rightarrow \ln n = 0.2(0.2t - \sin t) + C$$

$$n = 400 \Rightarrow \ln 400 = 0.2(0.4 - \sin 0) + C \Rightarrow C = \ln 400$$

$$n = 400e^{0.2(0.2t - \sin t) - 0.4} \Rightarrow n = 400e^{0.04t - 0.2\sin t - 0.4}$$

(30) أجد عدد الحشرات في هذا المجتمع بعد 3 أسابيع.

نعوض $t = 3$ في المعادلة الأخيرة:

$$n = 400e^{0.04(3) - 0.2\sin 3 - 0.4} = 400e^{0.12 - 0.028 - 0.4} = 400e^{-0.28} \approx 400e^{-0.28} \approx 439$$

إذن، بعد 3 أسابيع يكون عدد الحشرات 439 حشرة تقريباً.

(31) تمثل المعادلة التفاضلية: $x dy dx = y \cos$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحنها يمر بالنقطة $(0,1)$.

$$C \Rightarrow C=0 \quad y=+0=0 \quad \text{الحل العام} \quad x+C|y|=\sin x dx \Rightarrow \ln x \int dy y = \int \cos dy dx = y \cos$$

$$xx \Rightarrow y = e \sin |y| = \sin \ln \Rightarrow \text{نعوض } 1, x=0$$

ملاحظة: منحنى الاقتران $xy = -e \sin$ لا يمر بالنقطة $(0,1)$.

(32) تمثل المعادلة التفاضلية: $x(x+1) dy dx = y$ ميل المماس لمنحنى علاقة ما، أجد قاعدة هذه العلاقة إذا علمت أن منحنها يمر بالنقطة $(1,3)$.

$$1x(x+1) = Ax + Bx + 1A(x+1) + B(x) \quad \text{نستخدم الكسور الجزئية} \quad (dy y = \int dx x(x+1) \int)$$

$$)= 1x = 0 \Rightarrow A = 1x = -1 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow 1x(x+1) = 1x + -1x + 1 \Rightarrow \int dy y = \int dx x(x+1)$$

$$23 = 0 - \ln \ln \quad \text{الحل العام} \quad |x+1| + C|x| - \ln|y| = \ln|y| = \int (1x + -1x + 1) dx \Rightarrow \ln \Rightarrow \ln$$

$$|y|6 \Rightarrow \ln|x+1| + \ln|x| - \ln|y| = \ln \ln \Rightarrow \text{نعوض } 6 \quad y=3, x=12 = \ln 3 + \ln + C \Rightarrow C = \ln$$

$$|6xx+1| \Rightarrow |y| = |6xx+1| \Rightarrow y = 6xx+1 = \ln$$

ملاحظة: منحنى الاقتران $y = -6xx+1$ لا يمر بالنقطة $(1,3)$