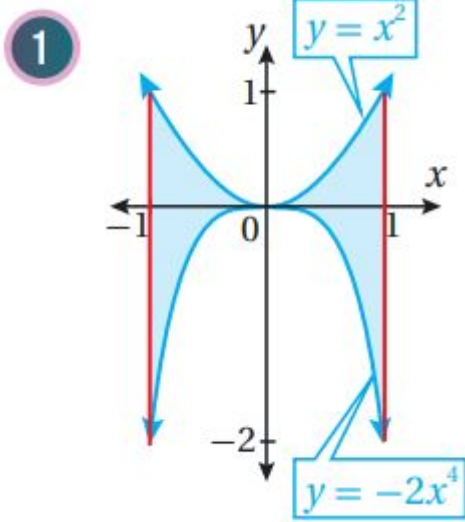


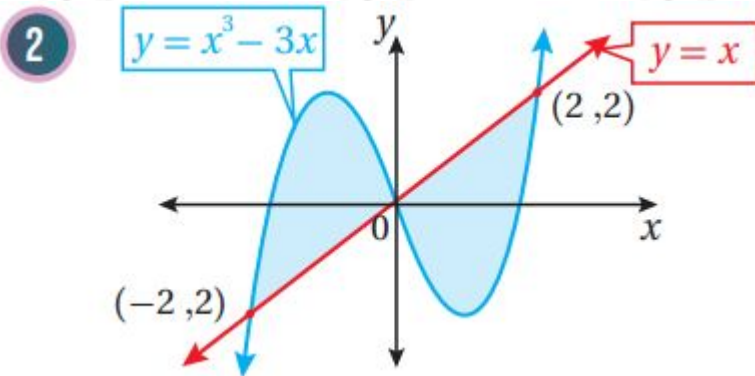
أتدرب وأحل المسائل

المساحات والحجوم

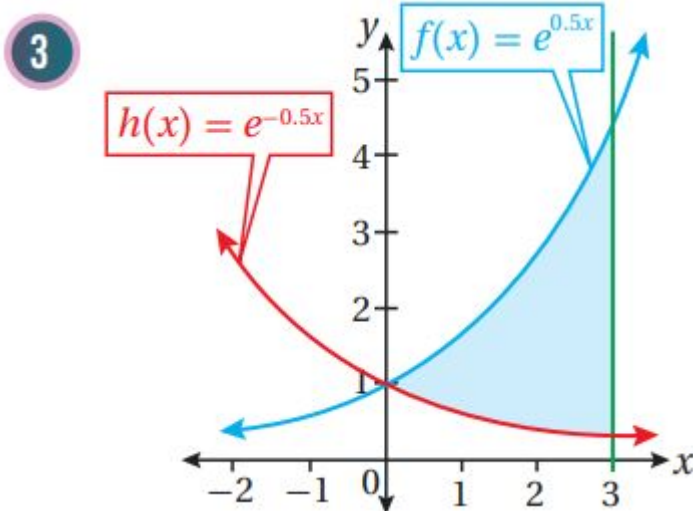
أجد مساحة المنطقة المظلمة في كل من التمثيلات البيانية الآتية:



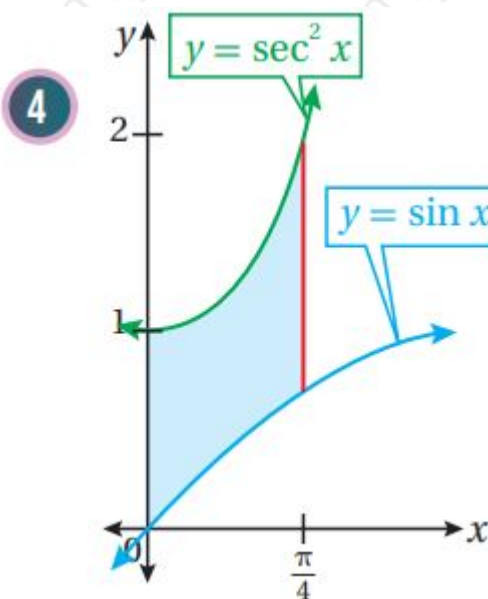
$$A = \int_{-1}^1 (x^2 - (-2x^4)) dx = \int_{-1}^1 (x^2 + 2x^4) dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 \right) \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2}{3} + \frac{4}{5} = \frac{22}{15}$$



$$A = \int_{-2}^2 (x^3 - 3x - x) dx + \int_0^2 (x - (x^3 - 3x)) dx = \int_{-2}^2 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (4x - x^3) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right) \Big|_{-2}^2 + \left(2x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^2 = (0 - (4 - 8)) + (8 - 4) - (0) = 8$$



$$A = \int_0^3 (e^{0.5x} - e^{-0.5x}) dx = (2e^{0.5x} + 2e^{-0.5x}) \Big|_0^3 = (2e^{1.5} + 2e^{-1.5}) - (2 + 2) = 2e^{1.5} + 2e^{-1.5} - 4$$



$$x) \Big|_0^{\pi/4} = (1 + 12) - (0 + 1) = 12x + \cos x \Big|_0^{\pi/4} = (\tan x - \sin x) \Big|_0^{\pi/4} = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \cos x) dx = (\tan x - \sin x) \Big|_0^{\pi/4} = (1 - 1) - (0 - 0) = 0$$

(5) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:

$$g(x) = 2x^2, f(x) = 12x^2 + 6$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 12x^2 + 6 = 2x^2 \Rightarrow 10x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 0.6 \Rightarrow x = \pm \sqrt{0.6} \approx \pm 0.7746$$

$$A = \int_{-0.7746}^{0.7746} (f(x) - g(x)) dx = \int_{-0.7746}^{0.7746} (12x^2 + 6 - 2x^2) dx = \int_{-0.7746}^{0.7746} (10x^2 + 6) dx = (10x^3/3 + 6x) \Big|_{-0.7746}^{0.7746} = (10(0.7746)^3/3 + 6(0.7746)) - (10(-0.7746)^3/3 + 6(-0.7746)) = (12.4 - 4.8) - (-12.4 + 4.8) = 16$$

(6) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $g(x) = 3x, f(x) = 4x$ والمستقيم $x = 1$ في الربع الأول.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x=4x \Rightarrow x=0 \quad A = \int_0^1 (f(x)-g(x))dx = \int_0^1 (4x-3x)dx = (4x \ln 3 - 3x^2) \Big|_0^1 = (4 \ln 3 - 3) - (0) = 4 \ln 3 - 3 \approx 0.3444$$

(7) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x)=e^x$ و $g(x)=\cos x$ ، في الربع الأول.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow e^x=\cos x$$

نعلم من حلول هذه المعادلة الحل غير السالب: $x=0$

في الربع الأول يكون $\cos x \leq 1$ بينما $e^x \geq 1$ ، إذن $e^x \geq \cos x$

$$A = \int_0^{\pi/2} (e^x - \cos x)dx = (e^x - \sin x) \Big|_0^{\pi/2} = (e^{\pi/2} - 1) - (1 - 0) = e^{\pi/2} - 2$$

(8) أجد المساحة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $f(x)=|x|$ و $g(x)=x^4$.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^4=|x| \Rightarrow x^4=x \text{ or } x^4=-x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

$$x^4+x=0 \Rightarrow x(x^3+1)=0 \Rightarrow x=0, x=-1$$

إذن، يتقاطع المنحنيان عند $x=-1, x=0, x=1$ ، ويكون في الفترتين $f(x) > g(x)$

$$A = \int_{-1}^1 (f(x)-g(x))dx$$

نجزئ هذا التكامل بسبب تغيير قاعدة $f(x)$ حول x ، نحسب هذه المساحة على النحو الآتي:

$$A = \int_{-1}^0 (-x-x^4)dx + \int_0^1 (x-x^4)dx = (-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5) \Big|_{-1}^0 + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{5}x^5) \Big|_0^1 = (0) - (-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) - (0) = \frac{3}{10} + \frac{3}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(9) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي

الاقترانين: $f(x)=3x^3-x^2-10x$ و $g(x)=-x^2+2x$.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow 3x^3-x^2-10x=-x^2+2x \Rightarrow 3x^3-12x=0 \Rightarrow 3x(x^2-4)=0 \Rightarrow x=0, x=-2, x=2$$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين -2 و 0 مثل -1 نجد أن:

$$f(-1)=-3-1+10=6, g(-1)=-1-2=-3$$

$(f(x) > g(x) \leftarrow$ في الفترة $[-2, 0]$

بحساب قيمتي الاقترانين عند عدد بين 0 و 2 مثل 1 نجد أن:

$$f(1) = 3 - 1 - 10 = -8, g(1) = -1 + 2 = 1$$

$(f(x) < g(x) \leftarrow$ في الفترة $[0, 2]$

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^0 (f(x) - g(x)) dx + \int_0^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^0 (3x^3 - x^2 - 10x - (-x^2 + 2x)) dx + \int_0^2 (-x^2 + 2x - (3x^3 - x^2 - 10x)) dx \\ &= \int_{-2}^0 (3x^3 - 12x) dx + \int_0^2 (12x - 3x^3) dx = (34x^4 - 6x^2) \Big|_{-2}^0 + (6x^2 - 34x^4) \Big|_0^2 = (0) - (12 - 24) + (24 - 12) - (0) = 24 \end{aligned}$$

(10) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ والمستقيمين: $x=0$, $x=1$.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow e^x = x^2$$

يمكن استعمال الآلة الحاسبة لمعرفة أن $(f(x) > g(x))$ في الفترة $(-\infty, 0]$

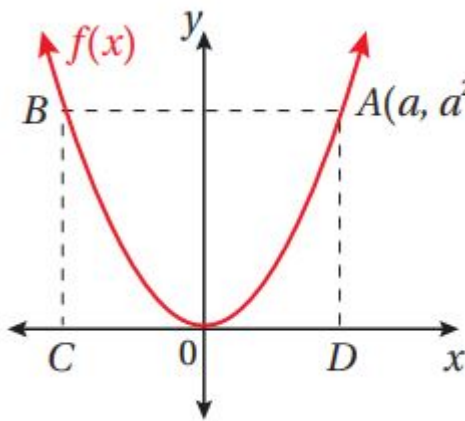
$$A = \int_0^1 (e^x - x^2) dx = (e^x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_0^1 = (e - \frac{1}{3}) - (1 - 0) = e - \frac{4}{3}$$

(11) أجد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين: $h(x) = 4x$, $f(x) = 12x^2$.

$$f(x) = h(x) \Rightarrow 12x^2 = 4x \Rightarrow 12x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1}{3}$$

$(h(x) > f(x))$ في الفترة $(0, \frac{1}{3})$

$$A = \int_0^{\frac{1}{3}} (h(x) - f(x)) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (4x - 12x^2) dx = (2x^2 - 4x^3) \Big|_0^{\frac{1}{3}} = (\frac{2}{9} - \frac{4}{27}) - (0) = \frac{2}{27}$$



(12) يبين الشكل التالي منحنى الاقتران: $f(x) = x^2$. إذا كان إحداثيا النقطة A هما $A(a, a^2)$ ، فأثبت أن مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x)$ والقطعة المستقيمة AB تساوي ثلثي مساحة المستطيل ABCD.

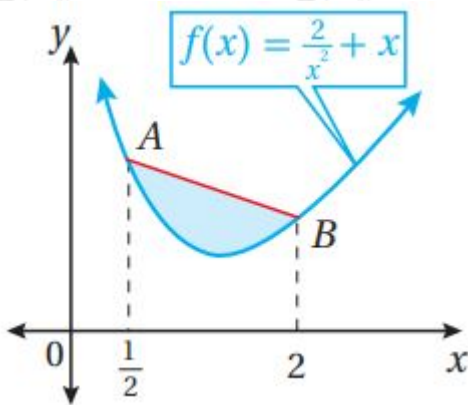
من التماثل فإن $B(-a, a^2)$

لتكن مساحة المنطقة المطلوبة:

$$\int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = (a^2x - \frac{1}{3}x^3) \Big|_{-a}^a = (a^3 - \frac{1}{3}a^3) - (-a^3 + \frac{1}{3}a^3) = 2a^3 - \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

مساحة المستطيل ABCD هي: $2a \times a^2 = 2a^3$

إذن، المساحة بين المنحنى والقطعة المستقيمة AB تساوي $\frac{2}{3}$ مساحة المستطيل ABCD.



(13) يبين الشكل المجاور منحنى الاقتران: $f(x) = 2x^2 + x$. إذا كان الإحداثي x لكل من النقطة A والنقطة B هو 12 و 2 على الترتيب، فأجد مساحة المنطقة المحصورة بين المستقيم AB ومنحنى الاقتران $f(x)$.

$$(A(12, f(12))) = (12, 172) \quad B(2, f(2)) = (2, 52)$$

ميل AB:

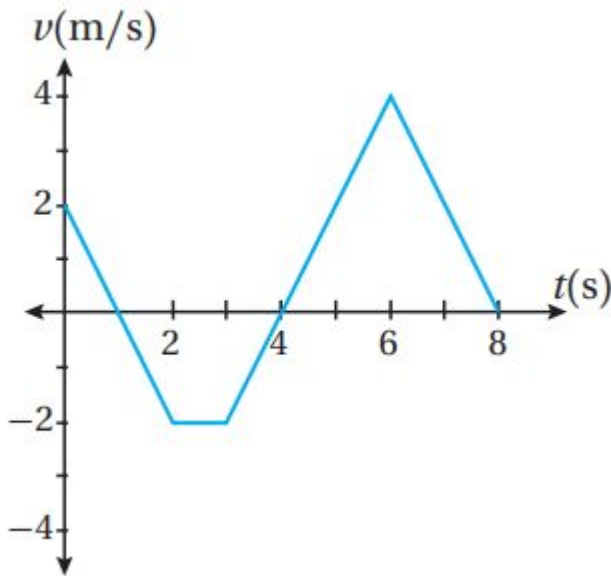
$$4 - = 172 - 52 \quad 12 - 2$$

معادلة المستقيم AB:

$$y-52=-4(x-2)\Rightarrow y=212-4x$$

المساحة المطلوبة هي:

$$\int_0^8 (212-4x-(2x-2+x))dx = \int_0^8 (212-5x-2x-2)dx = (212x-52x^2-2x^2)|_0^8 = 212(8)-10(64)-1(64)=278$$



يبين الشكل المجاور منحنى السرعة المتجهة - الزمن لجسيم يتحرك على المحور x في الفترة الزمنية $[0, 8]$ ، إذا بدأ الجسيم الحركة من $x=5$ عندما $t=0$ ، فأجد كلاً مما يأتي:

(14) إزاحة الجسيم في الفترة الزمنية المعطاة.

لتكن الإزاحة D

$$D=s(8)-s(0)=\int_0^8 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt+\int_4^8 v(t)dt$$

$\int_0^2 v(t)dt$ يساوي مساحة المثلث الأيسر في الرسم البياني وهي:

$$1=(2)(1)12$$

$\int_2^4 v(t)dt$ يساوي معكوس مساحة شبه المنحرف في الرسم البياني فهو يساوي:

$$-4=(2)(1+3)12$$

$\int_4^8 v(t)dt$ يساوي مساحة المثلث الأيمن في الرسم البياني وهي:

$$8=(4)(4)12$$

إذن، إزاحة الجسيم هي: $s(8)-s(0)=1+(-4)+8=5m$

(15) المسافة التي قطعها الجسم في الفترة الزمنية المعطاة.

المسافة التي قطعها الجسم هي: $\int_0^8 |v(t)| dt$

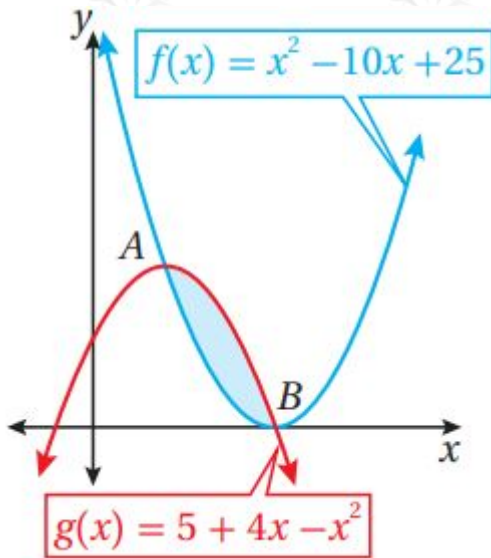
$$\int_0^8 |v(t)| dt = \int_0^1 |v(t)| dt + \int_1^4 |v(t)| dt + \int_4^8 |v(t)| dt = 1 + 4 + 8 = 13 \text{ m}$$

(16) الموقع النهائي للجسم.

$$s(8) - s(0) = 5$$

وبتعويض $s(0) = 5$ نجد أن:

$$s(8) - 5 = 5 \Rightarrow s(8) = 10 \text{ m}$$



يبين الشكل المجاور منحنىي الاقترانين: $f(x) = x^2 - 10x + 25$, $g(x) = 5 + 4x - x^2$ معتمداً هذا الشكل، أجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(17) أجد إحداثيي كل من النقطة A، والنقطة B.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 - 10x + 25 = 5 + 4x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 14x + 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$(\Rightarrow (x-5)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 5, x = 2 \Rightarrow A(2, 9), B(5, 0)$$

(18) أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المظللة حول المحور x.

$$V = \int_2^5 25\pi((5+4x-x^2)^2 - (x^2-10x+25)^2) dx = \int_2^5 25\pi(12x^3 - 144x^2 + 540x - 600) dx$$

$$= 12\pi \int_2^5 (x^3 - 12x^2 + 45x - 50) dx = 12\pi(14x^4 - 4x^3 + 45x^2 - 50x)|_2^5$$

$$= 12\pi(14(5)^4 - 4(5)^3 + 45(5)^2 - 50(5)) - (14(2)^4 - 4(2)^3 + 45(2)^2 - 50(2)) = 81\pi$$

(19) أجد حجم الجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقتران:

$f(x)=\sin x$ في الفترة $[0, \pi]$ ، والمحور x ، حول المحور x .

$$V = \int_0^\pi \pi (f(x))^2 dx = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \pi \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

(20) أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقترانين:
 $g(x)=x^3, f(x)=x$ حول المحور x .

$$x^3=x \Rightarrow x^6=x \Rightarrow x^6-x=0 \Rightarrow x(x^5-1)=0 \Rightarrow x=0, x=1$$

لكل $x \in (0, 1)$ يكون $x > x^3$

$$V = \int_0^1 \pi (f^2(x) - g^2(x)) dx = \pi \int_0^1 (x^2 - x^6) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) = \frac{2\pi}{21}$$

(21) أجد حجم المجسم الناتج من دوران المنطقة المحصورة بين منحنىي الاقتران:
 $f(x)=1+\sec x$ ، في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$ والمستقيم $y=3$ حول المحور x .

$$x = \pi/2 \Rightarrow \sec x = 3 \Rightarrow \cos x = 1/3 \Rightarrow x = \arccos(1/3)$$

نلاحظ أن المنحنيين يقعان فوق المحور x وأن $f(x)=1+\sec x < 3$ في الفترة $(-\pi/2, \pi/2)$

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/2}^{\arccos(1/3)} \pi (f^2(x) - 9) dx = \pi \int_{-\pi/2}^{\arccos(1/3)} (1 + 2\sec x + \sec^2 x - 9) dx \\ &= \pi \int_{-\pi/2}^{\arccos(1/3)} (-8 + 2\sec x + \sec^2 x) dx = \pi \left[-8x + 2\ln|\sec x + \tan x| + \tan x \right]_{-\pi/2}^{\arccos(1/3)} \\ &= \pi \left(-8\arccos(1/3) + 2\ln|\sec(\arccos(1/3)) + \tan(\arccos(1/3))| + \tan(\arccos(1/3)) \right) \end{aligned}$$