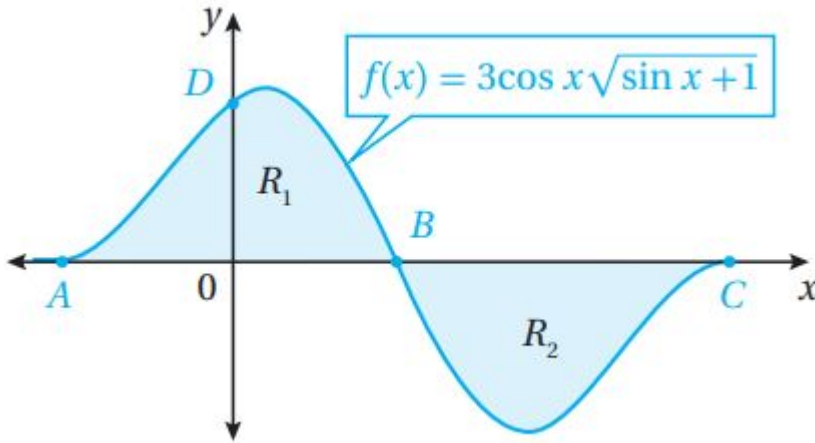


مهارات التفكير العليا

التكامل بالتعويض



تبرير: إذا كان الشكل المجاور
بمثل منحنى الاقتران:
 $f(x) = 3\cos x \sqrt{\sin x + 1}$ ، فأجب
عن الأسئلة الآتية تباعاً:

(40) أجد إحداثي كل من النقاط: A, B, C, D.

$$x=0 \Rightarrow x=\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}, x=3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \text{ since } \cos x = 0 \Rightarrow 3\cos x = 0$$

$$x=-1 \Rightarrow x=3\pi/2 + 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

يوجد عدد لا نهائي من الحلول لهاتين المعادلتين، نريد أصغر حلين موجبين (الإحداثي
x للنقطتين B, C) وأكبر حل سالب (الإحداثي x للنقطة A).

أصغر حلين موجبين هما: $x=\pi/2, x=3\pi/2$ بوضع $n=0$

$$(B(\pi/2, 0), C(3\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أكبر حل سالب هو: $x=-\pi/2$ بوضع $n=-1$

$$(A(-\pi/2, 0) \Rightarrow$$

أما النقطة D فإحداثياها هما: $(0, 3) = (D(0, f(0)))$

(41) أجد مساحة المنطقة المظللة.

$$A = A_1 + A_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx + \int_{\pi/2}^{3\pi/2} 3\cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$$

$$u = \sin x + 1 \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$A = \int_{3/2}^{5/2} 3\sqrt{u} du + \int_{3/2}^{5/2} -3\sqrt{u} du = 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{3/2}^{5/2} - 3 \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_{3/2}^{5/2} = 4 \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) - 4 \left(\frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = 8$$

(42) أبين أن للمنطقة R_1 والمنطقة R_2 المساحة نفسها.

من حل السؤال السابق نجد أن:

$$\int_0^{\pi/2} 3 \cos x \, dx = \int_0^1 3u \, du = \frac{3}{2} u^2 \Big|_0^1 = \frac{3}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin x \, dx = \int_1^0 -u \, du = \frac{1}{2} u^2 \Big|_1^0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(R_1) = A(R_2) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

(43) تحد: أجد قيمة: $\int_1^{16} \frac{1}{x^3} dx$.

$$u = 1 + x^3 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3x^2} du$$

$$x^3 = u - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{u-1}$$

$$\int_1^{16} \frac{1}{x^3} dx = \int_2^{65} \frac{1}{(u-1)^{3/2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt{u-1}} du = \frac{1}{3} \int_2^{65} \frac{1}{(u-1)^2} du$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{1-u} \right]_2^{65} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-65} - \frac{1}{1-2} \right) = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{64} + 1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{63}{64} = \frac{7}{64}$$

(44) تبرير: إذا كان f اقتراناً متصلاً، فأثبت

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

$$u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$$

$$x = \arcsin u \Rightarrow dx = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx = \int_0^1 f(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_1^0 f(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} (-du) = \int_0^1 f(u) \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$$

(45) تبرير: إذا كان a, b عددين حقيقيين موجبين، فأثبت

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \int_0^1 x^b (1-x)^a dx$$

bbb

تحد: أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

bbb

$$\int_0^{\pi/2} (\sin x + \cos x) dx$$

bbb

$$\int_0^1 x^2 (1+x) dx$$

bbb