

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

$$\int (x^2 + 3) dx \quad (1)$$

$$x^2 + 3 \Rightarrow du = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \Rightarrow \int (x^2 + 3) dx = \int \frac{u^2 + 3}{2} du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^3}{3} + 3u \right) + C = \frac{1}{6} (x^2 + 3)^3 + C$$

$$\int (x^4 e^{x^5} + 2) dx \quad (2)$$

$$x^4 e^{x^5} + 2 \Rightarrow du = 5x^4 \Rightarrow dx = \frac{du}{5x^4} \Rightarrow \int (x^4 e^{x^5} + 2) dx = \int \frac{e^u + 2}{5} du = \frac{1}{5} (e^u + 2u) + C = \frac{1}{5} (e^{x^5} + 2x^5) + C$$

$$\int (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx \quad (3)$$

$$(x+1)(x^2+2x+5)^4 \Rightarrow du = 2x+2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2} \Rightarrow \int (x+1)(x^2+2x+5)^4 dx = \frac{1}{2} \int u^4 du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^5}{5} \right) + C = \frac{1}{10} (x^2+2x+5)^5 + C$$

$$\int (x)^3 x dx \quad (4)$$

$$x^3 x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = \frac{du}{x} \Rightarrow \int (x)^3 x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4} u^4 + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C$$

$$\int x \sin^4 x \cos x dx \quad (5)$$

$$x \sin^4 x \cos x \Rightarrow du = \cos x \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x} \Rightarrow \int x \sin^4 x \cos x dx = \int u^4 du = \frac{1}{5} u^5 + C = \frac{1}{5} (\sin^5 x) + C$$

$$\int (x^1 + 3 \cos x) \sin x dx \quad (6)$$

$$x^1 + 3 \cos x \Rightarrow du = -\sin x \Rightarrow dx = \frac{du}{-\sin x} \Rightarrow \int (x^1 + 3 \cos x) \sin x dx = \int (-u^2 + 3) du = -\frac{1}{3} u^3 + 3u + C = -\frac{1}{3} (\sin^3 x) + 3 \cos x + C$$

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$\int_1^2 (12x^2(x^3+1)^2) dx \quad (7)$$

$$\begin{aligned} 12x^2(x^3+1)^2 dx &= u^2 du \quad u = x^3+1 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2} \\ \int_1^2 12x^2(x^3+1)^2 dx &= \int_2^9 4u^2 du = \frac{4}{3} u^3 \Big|_2^9 = \frac{4}{3} (27 - 8) = \frac{4}{3} \cdot 19 = \frac{76}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (1x^3x^2+2) dx \quad (8)$$

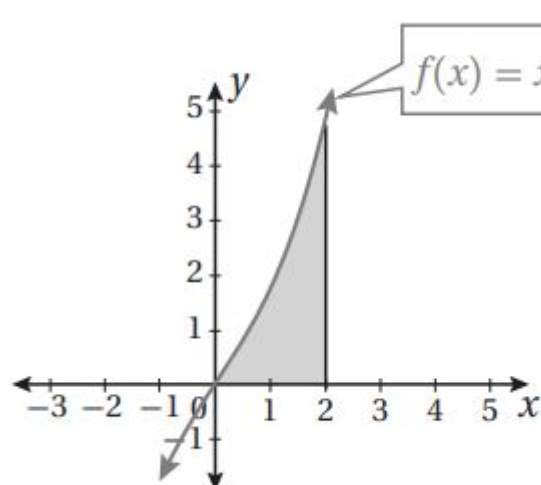
$$\begin{aligned} 1x^3x^2+2 dx &= u^2 du \quad u = 3x^2+2 \Rightarrow du = 6x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{6x} \\ \int_0^1 (1x^3x^2+2) dx &= \int_2^5 \frac{1}{6} u^2 du = \frac{1}{18} u^3 \Big|_2^5 = \frac{1}{18} (125 - 8) = \frac{117}{18} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$\int_1^e (x)^2 x dx \quad (9)$$

$$\begin{aligned} x^2 x dx &= u^2 du \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow dx = x du \\ \int_1^e (x)^2 x dx &= \int_0^1 u^2 e^{2u} du = \frac{1}{2} e^{2u} u^2 - \int e^{2u} u du = \frac{1}{2} e^{2u} u^2 - \frac{1}{2} e^{2u} u + \frac{1}{4} e^{2u} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} e^2 (1 - 1) + \frac{1}{4} e^2 = \frac{e^2}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (x+1)(x^2+2x)^5 dx &= u^5 du \quad u = x^2+2x \Rightarrow du = (2x+2) dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x+2} \\ \int_0^1 (x+1)(x^2+2x)^5 dx &= \int_0^3 \frac{1}{2} u^5 du = \frac{1}{12} u^6 \Big|_0^3 = \frac{1}{12} (729 - 0) = \frac{729}{12} \end{aligned}$$



(11) أجد مساحة المنطقة المظللة في التمثيل البياني المجاور.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 x \sqrt{x^2+2} dx \\ u &= x^2+2 \Rightarrow du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ A &= \int_2^6 \frac{1}{2} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_2^6 = \frac{1}{3} (6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}) \end{aligned}$$

(12) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: $R'(x) = 50 + 3.5x - 0.1x^2$ الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع من إنتاج إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المباعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(0) = 0$.

$$\begin{aligned} R(x) &= \int (50 + 3.5x - 0.1x^2) dx = \int 50 dx + \int 3.5x - 0.1x^2 dx = 50x + \int 3.5x - 0.1x^2 dx \\ u &= -0.1x^2 \Rightarrow du = -0.2x \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.2x} \\ \int 3.5x - 0.1x^2 dx &= \int 3.5x \frac{du}{-0.2x} - \int 0.1x^2 \frac{du}{-0.2x} = -17.5 \int \frac{du}{u} = -17.5 \ln|u| + C \\ R(x) &= 50x - 17.5 \ln|u| + C \\ R(0) &= 0 \Rightarrow 0 - 17.5 + C = 0 \Rightarrow C = 17.5 \end{aligned}$$

يمثل الاقتران $f'(x)$ في كل مما يأتي ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ المار بالنقطة المعطاة، أستمعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

(13) $f'(x) = 2x(4x^2 - 10)^2; (2, 10)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx \\ u &= 4x^2 - 10 \Rightarrow du = 8x \Rightarrow dx = \frac{du}{8x} \\ \int 2x(4x^2 - 10)^2 dx &= \int 2x \frac{du}{8x} u^2 = \frac{1}{4} \int u^2 du = \frac{1}{12} u^3 + C \\ f(2) &= 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (4 \cdot 2^2 - 10)^3 + C = 10 \Rightarrow \frac{1}{12} (16 - 10)^3 + C = 10 \\ \frac{1}{12} (6)^3 + C &= 10 \Rightarrow 3 + C = 10 \Rightarrow C = 7 \\ f(x) &= \frac{1}{12} (4x^2 - 10)^3 + 7 \end{aligned}$$

(14) $f'(x) = x^2 e^{-0.2x^3}; (0, 32)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int x^2 e^{-0.2x^3} dx \\ u &= -0.2x^3 \Rightarrow du = -0.6x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{-0.6x^2} \\ \int x^2 e^{-0.2x^3} dx &= \int x^2 \frac{du}{-0.6x^2} = -\frac{1}{0.6} \int e^u du = -\frac{1}{0.6} e^u + C \\ f(0) &= 32 \Rightarrow -\frac{1}{0.6} e^{-0.2 \cdot 0^3} + C = 32 \Rightarrow -\frac{1}{0.6} + C = 32 \Rightarrow C = 32 + \frac{1}{0.6} \\ f(x) &= -\frac{1}{0.6} e^{-0.2x^3} + 32 + \frac{1}{0.6} = -\frac{1}{0.6} e^{-0.2x^3} + \frac{196}{3} \end{aligned}$$

(15) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران:

$v(t) = t^2 + 1$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد t ثانية من بدء الحركة.

$$\begin{aligned} s(t) &= \int t^2 + 1 dt \\ u &= t^2 + 1 \Rightarrow du = 2t \Rightarrow dt = \frac{du}{2t} \\ \int t^2 + 1 dt &= \int \frac{u}{2} \frac{du}{2t} = \frac{1}{4} \int u du = \frac{1}{8} u^2 + C \\ s(t) &= \frac{1}{8} (t^2 + 1)^2 + C \\ s(0) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{8} (0^2 + 1)^2 + C = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{1}{8} \\ s(t) &= \frac{1}{8} (t^2 + 1)^2 - \frac{1}{8} \end{aligned}$$