

إجابات كتاب التمارين

الشرط الأولي

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $(f(x), f'(x))$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد معادلة الاقتران $f(x)$:

$$(f'(x)=3x-2; (-1,2)) \quad (1)$$

$$f(x)=\int (3x-2)dx=\frac{3}{2}x^2-2x+C \Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+C \quad f(-1)=2 \Rightarrow \frac{3}{2}+2+C=2 \Rightarrow C=-3 \Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x-3$$

$$(f'(x)=x+1; (4,5)) \quad (2)$$

$$f(x)=\int (x+1)dx=\frac{1}{2}x^2+x+C \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+C \quad f(4)=5 \Rightarrow \frac{1}{2}(16)+4+C=5 \Rightarrow C=-5 \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-5$$

$$(f'(x)=-x(x+1); (-1,5)) \quad (3)$$

$$f(x)=\int -x(x+1)dx=\int (-x^2-x)dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C \quad f(-1)=5 \Rightarrow -\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+C=5 \Rightarrow C=5+\frac{1}{6} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+5+\frac{1}{6}$$

$$(f'(x)=x^3-2x^2+2; (1,3)) \quad (4)$$

$$f(x)=\int (x^3-2x^2+2)dx=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x+C \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x+C \quad f(1)=3 \Rightarrow \frac{1}{4}-\frac{2}{3}+2+C=3 \Rightarrow C=3-\frac{5}{12} \Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2x-\frac{5}{12}$$

$$(f'(x)=x+x; (1,2)) \quad (5)$$

$$f(x)=\int (x+x)dx=\int (2x)dx=x^2+C \Rightarrow f(x)=x^2+C \quad f(1)=2 \Rightarrow 1+C=2 \Rightarrow C=1 \Rightarrow f(x)=x^2+1$$

$$(f'(x)=-10x^2; (1,15)) \quad (6)$$

$$f(x)=\int -10x^2dx=-\frac{10}{3}x^3+C \Rightarrow f(x)=-\frac{10}{3}x^3+C \quad f(1)=15 \Rightarrow -\frac{10}{3}+C=15 \Rightarrow C=15+\frac{10}{3} \Rightarrow f(x)=-\frac{10}{3}x^3+15+\frac{10}{3}$$

(7) إذا كان ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ هو $f'(x)=x$ ، فأجد قاعدة الاقتران $f(x)$ ، علماً بأن منحناه يمر بالنقطة $(9,25)$.

$$f(x) = \int x dx = \int x^1 dx = \frac{1}{2}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 + C \quad f(9) = 25 \Rightarrow \frac{1}{2}(9)^2 + C = 25 \Rightarrow 40.5 + C = 25 \Rightarrow C = -15.5 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 15.5$$

(8) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 2x^2$ ، فأجد قاعدة العلاقة y ، علماً بأن منحناها يمر بالنقطة $(2,4)$.

$$f(x) = \int 2x^2 dx = \int 2x^2 - 2 dx = -2x - 1 + C = -2x + C \Rightarrow f(x) = -2x + C \quad f(2) = 4 \Rightarrow -2(2) + C = 4 \Rightarrow -4 + C = 4 \Rightarrow C = 8 \Rightarrow f(x) = -2x + 8$$

(9) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة y هو: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 8$ ، ومر منحناها بنقطة الأصل، فأجد الإحداثي x لجميع نقاط تقاطع منحنى العلاقة مع المحور x ، مبرراً إجابتي.

$$f(x) = \int (3x^2 - 12x + 8) dx = x^3 - 6x^2 + 8x + C \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + C \quad f(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

لإيجاد الإحداثيات لنقاط تقاطع المنحنى مع محور x نفرض $y=0$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x(x-2)(x-4) = 0 \Rightarrow x=0, x=2, x=4=0$$

(10) الإيراد الحدي: يمثل الاقتران: $R'(x) = x^2 - 3$ الإيراد الحدي (بالدينار) لكل قطعة تباع من منتجات إحدى الشركات، حيث x عدد القطع المباعة، و $R(x)$ إيراد بيع x قطعة بالدينار. أجد اقتران الإيراد $R(x)$ ، علماً بأن $R(0)=0$.

إرشاد: يمثل الإيراد الحدي مشتقة اقتران الإيراد.

$$R(x) = \int (x^2 - 3) dx = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C \Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x + C \quad R(0) = 0 \Rightarrow 0 - 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow R(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x$$

(11) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = 3t^2 - 12t + 11$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل، فأجد موقعه بعد ثانيتين من بدء الحركة.

$$s(t) = \int (3t^2 - 12t + 11) dt = t^3 - 6t^2 + 11t + C \Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t + C$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 - 6t^2 + 11t$$

$$s(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 11(2) = 8 - 24 + 22 = 6m$$

(12) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، ويعطى تسارعه بالاقتران: $a(t) = 6t - 30$ ، حيث t الزمن بالثواني، و a التسارع بالـ m/s^2 . إذا بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة متجهة مقدارها $72m/s$ ، فأجد موقعه بعد 3 ثوان من الحركة.

$$v(t) = \int (6t - 30) dt = 3t^2 - 30t + C \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + C$$

$$v(0) = 72 \Rightarrow 0 + 0 + C = 72 \Rightarrow C = 72 \Rightarrow v(t) = 3t^2 - 30t + 72$$

$$s(t) = \int (3t^2 - 30t + 72) dt = t^3 - 15t^2 + 72t + C$$

$$s(0) = 0 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 - 15t^2 + 72t$$

$$s(3) = (3)^3 - 15(3)^2 + 72(3) = 27 - 135 + 216 = 108m$$