أتدرب وأحل المسائل

قاعدة السلسلة الأسئلة (25 - 41)

بكتيريا: يمثل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

(25) أجد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N .

$A(t)=Ne0.1tA′(t)=0.1Ne0.1tA′(3)=0.1Ne0.3$

(26) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعات هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N .

$A′(k)=0.1Ne0.1k0.2=0.1Ne0.1ke0.1k=0.20.1N=2N0.1k=ln2N→k=10ln2N$

أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلّ ممّا يأتي:

(27) $f(x)=sinπx,\ f''(x)$

$f(x)=sinπxf′(x)=πcosπxf′′(x)=−π2sinπxf′′′(x)=−π3cosπx$

(28) $f(x)=cos(2x+1),\ f(5)(x)$

$f(x)=cos(2x+1)f′(x)=−2sin(2x+1)f′′(x)=−4cos(2x+1)f′′′(x)=8sin(2x+1)f(4)(x)=16cos(2x+1)f(5)(x)=−32sin(2x+1)$

(29) $f(x)=cosx2,f''(x)$

$f(x)=cos\ x2f′(x)=−2xsin\ x2f′′(x)=(−2x)(2xcos\ x2)+(sin\ x2)(−2)=−4x2cos\ x2−2sin\ x2$

(30) إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0,1)$.

$$y=esinxdydx=esinxcos\ x$$

ميل المماس هو:

$$m=dydx|x=0=esin0cos0=1$$

(31) مواد مشعّة: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عينة كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران: $A(t)=20(12)t/140$. أجد معدل تحلل عنصر البلوتويوم عند $t = 2$.

$$A(t)=20(12)t140A′(t)=20140(ln12)(12)t140A′(2)=20140(ln12)(12)2140≈−0.098$$

إذن يتحلل البلوتونيوم بمعدل 0.098 g كلّ يوم عندما $t = 2$.

زنبرك: تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويحدد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، و s الموقع بالسنتيمترات.

(32) أجد السرعة المتجهة للكرة عندما $t = 1$.

$$s(t)=0.1sin2.4tv(t)=2.4×0.1cos2.4t=0.24cos2.4tv(1)=0.24cos2.4≈−0.177cm/s$$

(33) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً.

$$v(t)=0→0.24cos2.4t=0→cos2.4t=0$$

وهذا يعني أنّ:

$$|\sin 2.4t|=1$$

أي أنّ:

$$\sin 2.4t=1,\ \text{or}\ -1$$

لكن موقع الكرة هو:

$s(t)=0.1\sin 2.4t$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو:

$s=0.1(1)=0.1 \text{ or } ,s=0.1(-1)=-0.1$

cm إذن، عندما تكون سرعة الكرة صفراً يكون موقعها عند 0.1 أو -0.1 cm

(34) أجد موقع الكرة عندما تكون تسارعها صفراً.

$a(t)=-0.24\times 2.4\sin 2.4t=-0.576\sin 2.4t a(t)=0\rightarrow \sin 2.4t=0$

لكن موقع الكرة هو:

$s(t)=0.1\sin 2.4t$

وبتعويض قيمة $\sin 2.4t$ نجد أن الموقع هو: $s = 0.1(0) = 0$

$s = 0$ إذن، عندما تكون تسارع الكرة صفراً يكون موقعها عند ، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

أجد معادلة المماس لمنحى كل معادلة وسيطية مما يأتي عند النقطة المحددة بقيمة t المعطاة:

(35) $x = t + 2 , y = t^2 - 1 , t = 1$

$dydt=2t, dxdt=1 dydx=dydtdxdt=2t1=2t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=1=2\times 1=2$

نقطة التماس:

$x=1+2=3, y=(1)2-1=0$

معادلة المماس:

$y-0=2(x-3)\rightarrow y=2x-6$

(36) $x=t2,\ y=t2-4,\ t=-1$

$dydt=2t, dxdt=12 dydx=dydtdxdt=2t12=4t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=-1=4\times-1=-4$

نقطة التماس:

$x=-12,\ y=(-1)2-4=-3$

معادلة المماس:

$y+3=-4(x+12)\rightarrow y=-4x-5$

(37) $x=t-\sin t,\ y=1-\cos t,\ t=\pi3$

$dydt=\sin t, dxdt=1-\cos t dydx=dydtdxdt=\sin t1-\cos t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=\pi3=\sin \pi31-\cos \pi3=321-12=3$

نقطة التماس:

$x=\pi3-32,\ y=1-12=12$

معادلة المماس:

$y-12=3(x-\pi3+32)\rightarrow y=3x-3\pi3+2$

(38) $x=\sec2\ t-1,\ y=\tan t,\ t=-\pi4$

$dydt=\sec2\ t, dxdt=2\times\sec t\times\sec t\tan t=2\sec2\ t\tan t dydx=dydtdxdt=\sec2\ t2\sec2\ t\tan t=12\cot t$

ميل المماس:

$m=dydx|t=-\pi4=12\cot(-\pi4)=-12$

نقطة التماس:

$x=\sec 2\ (-\pi 4)-1=1,\ y=\tan\ (-\pi 4)=-1$

معادلة المماس:

$y+1=-12(x-1)\rightarrow y=-12x-12$

(39) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x=2(t-\sin$ ، $(t\ t),\ y=2(1-\cos$
حيث: $0\le t\le 2\pi$. أثبت أن ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحى هذه العلاقة عندما $t=\pi 4$ هما: $2g\cdot 1+2-1$ على الترتيب.

$dydt=2\sin\ t, dxdt=2(1-\cos\ t) dydx=dydtdxdt=2\sin\ t2(1-\cos\ t)=si\ n\ t1-\cos\ t$

ميل المماس:

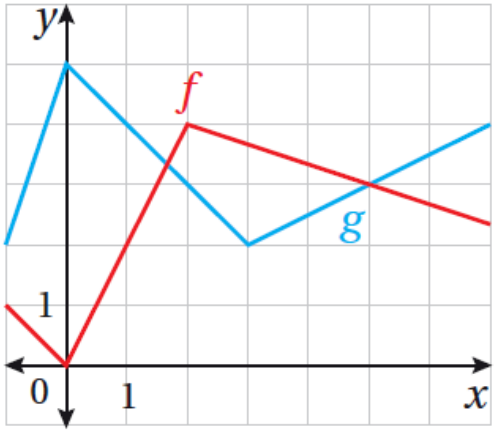
$m=dydx|t=\pi 4=\sin\ \pi 41-\cos\ \pi 4=121-12=12-1\times 2+12+1=2+1$

ميل العمودي على المماس:

$m=-12+1\times 2-12-1=1-2$

يبين الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:

$h(x) = f(g(x))$ ، وكان: $p(x) = g(f(x))$ ، فأجد كلاً مما يأتي:



(40) $h'(1)$

$h'(1)=f'(g(1))\times g'(1)=f'(4)\times g'(1)$

$g'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي -1

$f'(4)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (5, 3) و (2, 4) ويساوي -13

$h'(1)=-13\times-1=13$

(41) $p'(1)$

$p'(1)=g'(f(1))\times f'(1)=g'(2)\times f'(1)$

$g'(2)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (3, 2) و (0, 5) ويساوي -1

$f'(1)$ ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0, 0) و (2, 4) ويساوي 2

$p'(1)=-1\times2=-2$