

إجابات كتاب التمارين

التكامل بالتعويض

أجد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int x x^2 + 4 \, dx$

$$u = x^2 + 4 \Rightarrow du = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad \int x x^2 + 4 \, dx = \int x u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2} \int u \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{4} (x^2 + 4)^2 + C$$

(2) $\int (1 - \cos x^2)^2 \sin x^2 \, dx$

$$u = 1 - \cos x^2 \Rightarrow du = 2 \sin x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{2 \sin x^2} \quad \int (1 - \cos x^2)^2 \sin x^2 \, dx = \int u^2 \sin x^2 \frac{du}{2 \sin x^2} = \frac{1}{2} \int u^2 \, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6} (1 - \cos x^2)^3 + C$$

(3) $\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx$

$$\int \csc^5 x \cos^3 x \, dx = \int \csc^3 x \sin^5 x \, dx = \int \csc^3 x \sin^4 x \cos x \, dx \quad u = \csc x \Rightarrow du = -\csc^2 x \, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{-\csc^2 x} \quad \int \csc^3 x \sin^4 x \cos x \, dx = \int \csc^3 x \sin^4 x \frac{du}{-\csc^2 x} = -\int \sin^4 x \, du = -\int (1 - \cos^2 x)^2 \, du = -\int (1 - u^2)^2 \, du = -\int (1 - 2u^2 + u^4) \, du = -\left(u - \frac{2}{3} u^3 + \frac{1}{5} u^5\right) + C = -\csc x + \frac{2}{3} \csc^3 x - \frac{1}{5} \csc^5 x + C$$

(4) $\int x \sin x^2 \, dx$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \quad \int x \sin x^2 \, dx = \int \frac{1}{2} \sin u \, du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

(5) $\int x^3 (x+2)^7 \, dx$

$$u = x+2 \Rightarrow du = dx, x = u-2 \quad \int x^3 (x+2)^7 \, dx = \int (u-2)^3 u^7 \, du = \int (u^4 - 6u^3 + 12u^2 - 8u) \, du = \frac{1}{5} u^5 - \frac{6}{4} u^4 + \frac{12}{3} u^3 - \frac{8}{2} u^2 + C = \frac{1}{5} (x+2)^5 - \frac{3}{2} (x+2)^4 + 4(x+2)^3 - 4(x+2)^2 + C$$

(6) $\int \ln x \, dx$

$$\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx \quad u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \, du \quad \int \ln x \, dx = \int 1 \cdot u \cdot x \, du = \int u \, du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C$$

(7) $\int e^{xx} dx$

$$u=x \Rightarrow du=dx \Rightarrow \int e^{xx} dx = \int e^u \times x du = 2 \int e^u du = 2e^u + C = 2e^x + C$$

(8) $\int \sin(\ln 4x^2)x dx$

$$\int \sin(\ln 4x^2)x dx = \int \sin(2\ln 2x)x dx \quad u=2\ln 2x \Rightarrow du=2x \Rightarrow dx=x^2 du \int \sin(\ln 4x^2)x dx = \int \sin u \times x^2 du = \frac{1}{2} \int \sin u du = -\frac{1}{2} \cos u + C = -\frac{1}{2} \cos(2\ln 2x) + C = -\frac{1}{2} \cos(\ln 4x^2) + C$$

(9) $\int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx$

$$u=\tan x \Rightarrow du=\sec^2 x \Rightarrow \int \sec^2 x \cos^3(\tan x) dx = \int \cos^3 u du = \int \cos u \cos^2 u du = \int \cos u (1 - \sin^2 u) du \quad v=\sin u \Rightarrow dv=\cos u \Rightarrow \int \cos u (1 - \sin^2 u) du = \int (1 - v^2) dv = v - \frac{1}{3} v^3 + C = \sin u - \frac{1}{3} \sin^3 u + C = \sin(\tan x) - \frac{1}{3} \sin^3(\tan x) + C$$

ملحوظة: يمكن إيجاد هذا التكامل بإعادة كتابته على الصورة:

$$\int \sec^2 x \cos(\tan x)(1 - \sin^2(\tan x)) dx$$

$u = \sin(\tan x)$ وبتعويض واحد فقط هو .

أجد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$\int_0^1 (x^2 + 1) dx$

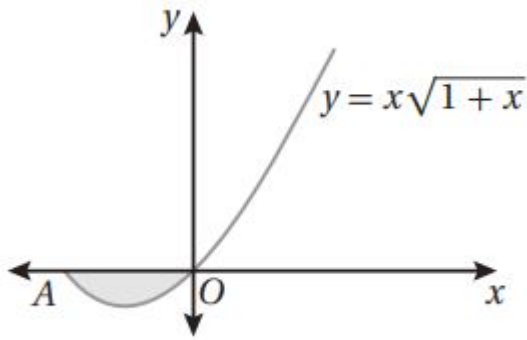
$\int_1^2 (x - 1) dx$

$\int_0^{\pi/2} (\cos x + \sin x) dx$

$\int_1^2 (x^3 + 1) dx$

$\int_0^1 (4x \cos 2\pi/4 + \tan x) dx$

$\int_0^1 (15x \sin 3\pi/3 + \cos 2x) dx$



(16) يبين الشكل المجاور جزءاً من منحنى الاقتران: $f(x) = x\sqrt{1+x}$.

أجد مساحة المنطقة المظللة في هذا الشكل.

في كل مما يأتي المشتقة الأولى للاقتران $f(x)$ ، ونقطة يمر بها منحنى $y=f(x)$ أستعمل المعلومات المعطاة لإيجاد قاعدة الاقتران $f(x)$:

$$(x; (\pi/4, 0)) \quad (17) \quad f'(x) = 16 \sin 3x$$

$$(f'(x) = x^2 + 5; (2, 1)) \quad (18)$$

(19) يتحرك جسيم في مسار مستقيم، وتعطى سرعته المتجهة بالاقتران: $v(t) = -2t(1+t^2)^{3/2}$ ، حيث t الزمن بالثواني، و v سرعته المتجهة بالمتري لكل ثانية. إذا كان الموقع الابتدائي للجسيم هو $4m$ ، فأجد موقع الجسيم بعد t ثانية.