

أدرب وأحل المسائل

المشتقة الثانية والسرعة المتجهة والتسارع

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي:

(1) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 5x$

$$f'(x) = 9x^2 - 8x + 5 \quad f''(x) = 18x - 8$$

(2) $f(x) = 2e^x + x^2$

$$f'(x) = 2e^x + 2x \quad f''(x) = 2e^x + 2$$

(3) $f(x) = 2\cos x - x^3$

$$f'(x) = -2\sin x - 3x^2 \quad f''(x) = -2\cos x - 6x$$

(4) $f(x) = 4\ln x - 3x^3$

$$f'(x) = 4(1/x) - 9x^2 = 4/x - 9x^2 \quad f''(x) = -4/x^2 - 18x$$

(5) $f(x) = x^3(x+6)^6$

$$f'(x) = (x^3)(6)(x+6)^5(1) + (x+6)^6(3x^2) = (x+6)^5(9x^3 + 18x^2) \quad f''(x) = (5)(x+6)^4(1)(9x^3 + 18x^2) + (x+6)^5(27x^2 + 36x) = (x+6)^4(72x^3 + 288x^2 + 216x)$$

(6) $f(x) = x^7 \ln x$

$$f'(x) = (x^7)(1/x) + (\ln x)(7x^6) = x^6 + (\ln x)(7x^6) \quad f''(x) = 6x^5 + (\ln x)(42x^5) + (7x^6)(1/x) = 13x^5 + (\ln x)(42x^5)$$

(7) $f(x) = x^{x+2}$

$$f'(x) = (x+2)(1) - (x)(1)(x+2)^2 = 2(x+2)^2 \quad f''(x) = -2 \times 2(x+2)(1)(x+2) = -4(x+2)^3$$

(8) $f(x) = \sin x^2$

$$f'(x) = 2x \cos x^2 \quad f''(x) = (2x)(-2x \sin x^2) + (\cos x^2)(2) = -4x^2 \sin x^2 + 2 \cos x^2$$

$$(9) f(x) = 2x - 3$$

$$f'(x) = -6x - 4 \quad f''(x) = 24x - 5$$

$$(10) f(x) = x^3 - 5x$$

$$f(x) = x^3 - 5x = x^3 - 5x - 1 \quad f'(x) = 3x^2 + 5x - 2 \quad f''(x) = 6x - 10x - 3$$

$$(11) f(x) = x$$

$$f(x) = x = x^{1/2} \quad f'(x) = 1/2x^{-1/2} \quad f''(x) = -1/4x^{-3/2} = -1/4x^3$$

$$(12) f(x) = 2 - 4x + x^2 - x^3$$

$$f'(x) = -4 + 2x - 3x^2 \quad f''(x) = 2 - 6x$$

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة المعطاة:

$$(13) f(x) = 8x^3 - 3x + 4x, \quad x = -2$$

$$f(x) = 8x^3 - 3x + 4x = 8x^3 - 3x + 4x - 1 \quad f'(x) = 24x^2 - 3 - 4x - 2 \quad f''(x) = 48x + 8x - 3 \quad f''(-2) = 48(-2) + 8(-2) - 3 = -96 - 16 - 3 = -115$$

$$(14) f(x) = 12x - 4, \quad x = 3$$

$$f'(x) = -2(2x - 4) \quad f''(x) = 2 \times 2 \times (2x - 4) = 8(2x - 4) \quad f''(3) = 8(2(3) - 4) = 8(6 - 4) = 8 \times 2 = 16$$

(15) إذا كان: $f(x) = px^3 - 3px^2 + x - 4$, وكانت: $f''(2) = -1$, فأجد قيمة الثابت p .

$$f'(x) = 3px^2 - 6px + 1 \quad f''(x) = 6px - 6p \quad f''(2) = 6p(2) - 6p - 1 = 12p - 6p - 1 = 6p - 1 = -1 \quad 6p = 0 \quad p = 0$$

يمثل الاقتران: $s(t) = t^5 - 20t^2, \quad t \geq 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث

s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

(16) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 3$ ؟

$$v(t) = 5t^4 - 40t \quad v(3) = 5(3)^4 - 40(3) = 405 - 120 = 285 \text{ m/s}$$

(17) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 3$ ؟

بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب $t = 3$ (إلى اليمين) عندما .

(18) ما تسارع الجسم عندما $t = 3$ ؟

$$a(t) = 20t^3 - 40 \quad a(3) = 20(3)^3 - 40 = 540 - 40 = 500 \text{ m/s}^2$$

(19) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0

$$5t^4 - 40t = 0 \quad 5t(t^3 - 8) = 0 \quad t = 0 \text{ or } t = 2$$

s يمثل الاقتران: $t \geq 0$, $s(t) = 3t^2 + t$ موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم، حيث الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

(20) ما سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 4$ ؟

$$s(t) = 3t^2 + t \quad v(t) = (1+t)(3) - (3t)(1) = 3(1+t) - 3t = 3 \quad v(4) = 3(1+4) = 15 \text{ m/s}$$

(21) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$ ؟

بما أن إشارة السرعة المتجهة موجبة، فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب $t = 4$ (إلى اليمين) عندما .

(22) ما تسارع الجسم عندما $t = 4$ ؟

$$a(t) = -3 \times 2(1+t) = -6(1+t) \quad a(4) = -6(1+4) = -30 \text{ m/s}^2$$



لوح تزلج: يتحرك رامي في مسار مستقيم على لوح تزلج بحيث يمكن نمذجة موقعه باستعمال الاقتران:
 $s(t) = t^2 - 8t + 12$ ، حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

(23) ما سرعة رامي المتجهة بعد 6 ثوانٍ من بدء حركته؟

$$v(t) = 2t - 8 \quad v(6) = 2(6) - 8 = 4 \text{ m/s}$$

(24) ما تسارع رامي بعد 6 ثوانٍ من بدء حركته؟

$$a(t) = 2 \quad a(6) = 2 \text{ m/s}^2$$

(25) أجد قيم t التي يكون عندها رامي في حالة سكون لحظي.

يكون رامي في حالة سكون لحظي عندما تكون سرعته المتجهة 0

$$2t - 8 = 0 \rightarrow t = 4$$