إجابات كتاب التمارين

قوانين اللوغاريتمات

إذا كان: $\log_a 7 \approx 0.936$ ، وكان: $\log_a 3 \approx 0.528$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(1) loga 37

$\log a\ 37 = \log a\ 3 - \log a\ 7 \approx 0.528 - 0.936 \approx -0.408$

(2) loga 21

$\log a\ 21 = \log a\ 3 \times 7 = \log a\ 3 + \log a\ 7 \approx 0.528 + 0.936 \approx 1.464$

(3) loga 3loga 7

$\log a\ 3 \log a\ 7 \approx 0.528 0.936 \approx 528936 \approx 0.56$

(4) loga 17

$\log a\ 17 = \log a\ 1 - \log a\ 7 \approx 0 - 0.936 \approx -0.936$

(5) loga 441

$\log a\ 441 = \log a\ 21^2 = 2 \log a\ 21 = 2 \log a\ (3 \times 7) = 2(\log a\ 3 + \log a\ 7) \approx 2(0.528 + 0.936) \approx 2 \times 1.464 \approx 2.928$

(6) loga 4927

$\log a 4927 = \log a 49 - \log a 27 = \log a 7^2 - \log a 3^3 = 2 \log a 7 - 3 \log a 3 \approx 2(0.936) - 3(0.528) \approx 1.872 - 1.584 \approx 0.288$

(7) loga (7a2)

$\log a(7a^2) = \log a 7 + \log a a^2 = \log a 7 + 2 \log a a \approx 0.936 + 2 \approx 2.936$

(8) loga 814

$\log a 814 = \log a 344 = \log a 3 \approx 0.528$

(9) (loga 3)(loga 7)

$(\log_a 3)(\log_a 7) \approx 0.528 \times 0.936 \approx 0.494$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المطولة، علماً بأنّ المتغيرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

(10) $\log_a x^7$

$\log_a x^7 = 7\log_a x$

(11) $\log_a(acb)$

$\log_a(acb) = \log_a ac - \log_a b = \log_a a + \log_a c - \log_a b = 1 + \log_a c - \log_a b$

(12) $\log_a(\sqrt{x})$

$\log_a(\sqrt{x}) = \log_a x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log_a x$

(13) $\log_a(xyz)$

$\log_a(xyz) = \log_a xy - \log_a z = \log_a(xy)^{\frac{1}{2}} - \log_a z = \log_a x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} - \log_a z = \log_a x^{\frac{1}{2}} + \log_a y^{\frac{1}{2}} - \log_a z = \frac{1}{2}\log_a x + \frac{1}{2}\log_a y - \log_a z$

(14) $\log_a \frac{1}{x^3 y^4}$

$\log_a \frac{1}{x^3 y^4} = \log_a 1 - \log_a x^3 y^4 = \log_a 1 - (\log_a x^3 + \log_a y^4) = 0 - (3\log_a x + 4\log_a y) = -3\log_a x - 4\log_a y$

(15) $\log_a \sqrt[7]{\frac{x^7}{8}}$

$\log_a \sqrt[7]{\frac{x^7}{8}} = \log_a \frac{x}{\sqrt[7]{8}} = \log_a \frac{x}{2} = \log_a x - \log_a 2$

(16) $\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5 y^{-2})^3}$

$\log_a \frac{(x^{-1}y^2)^4}{(x^5 y^{-2})^3} = \log_a \frac{x^{-4}y^8}{x^{15}y^{-6}} = \log_a x^{-19}y^{14} = \log_a x^{-19} + \log_a y^{14} = -19\log_a x + 14\log_a y$

(17) $\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{z^3}}$

$\log_a \sqrt{\frac{x^2 y^3}{z^3}} = \log_a \frac{x^2 y^3}{z^3} = \log_a \frac{xy^3}{z^3} = \log_a xy^3 - \log_a z^3 = \log_a x +$

$\log_a y^{32} - \log_a z^{32} = \log_a x + 32\log_a y - 32\log_a z$

(18) $\log_a (x - y + z)^9,\ y - x < z$

$\log_a (x - y + z)^9 = 9\log_a (x - y + z)$

أكتب كل مقدار لوغاريتمي ممّا يأتي بالصورة المختصرة، علماً بأنّ المتغيرات جميعها تُمثّل أعداداً حقيقية موجبة:

(19) $\log_a x - \log_a y$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

(20) $\log_b (b-1) + 2\log_b b,\ b > 1$

$\log_b (b-1) + 2\log_b b = \log_b (b-1) + \log_b b^2 = \log_b b - 1 b^2$

(21) $\log_a x - \log_a \frac{1}{x}$

$\log_a x - \log_a \frac{1}{x} = \log_a x \frac{1}{x} = \log x$

(22) $\log_a (x^2 - 25) - \log_a (x+5),\ x > 5$

$\log_a (x^2 - 25) - \log_a (x+5) = \log_a \frac{(x^2-25)}{(x+5)} = \log_a \frac{(x+5)(x-5)}{(x+5)} = \log_a (x-5)$

(23) $3\log_b 1 - \log_b b$

$3\log_b 1 - \log_b b = 3(0) - 1 = -1$

(24) $8\log_b x + 4\log_b y - 12\log_b z$

$8\log_b x + 4\log_b y - 12\log_b z = \log_b x^8 + \log_b y^4 - \log_b z^{12} = \log_b \frac{x^8 y^4}{z^{12}} = \log_b \frac{x^8 y^4}{z^{12}} = \log_b \frac{x^8 y^4}{z}$

(25) إيرادات: يمثل الاقتران: $T(a) = 10 + 20 \log_6 (a + 1)$ مبيعات شركة (بآلاف الدنانير) من منتج جديد، حيث a المبلغ (بآلاف الدنانير) الذي تنفقه الشركة على إعلانات

المنتج، و $a \geq 0$. وتعني القيمة: $T(1) \approx 17.7$ أنّ إنفاق 1000 JD على الإعلانات يحقق إيرادات قيمتها 177000 JD من بيع المنتج. أجد قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ 11 ألف دينار على الإعلانات، علماً بأنّ $\log_6 2 \approx 0.3869$.

$$T(a)=10+20\log_6(a+1) f(11)=10+20\log_6(11+1)=10+20\log_6(12)=10+20\log_6(6\times2)=10+20(\log_6 6+\log_6 2)\approx10+20(1+0.3869)\approx10+20(1.3869)\approx10+27.738\approx37.738$$

قيمة إيرادات الشركة بعد إنفاقها مبلغ 11000 JD على الإعلانات هو 37738 JD .