

أدرب وأحل المسائل

مشتقنا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

(1) $f(x) = x^3 2x - 1$

$$f(x) = x^3 2x - 1 \quad f'(x) = (2x - 1)(3x^2) - (x^3)(2)(2x - 1)^2 = 4x^3 - 3x^2(2x - 1)^2$$

(2) $f(x) = x^3 \sec x$

$$f(x) = x^3 \sec x \quad f'(x) = (x^3)(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2) = x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

(3) $f(x) = x + 1 \cos x$

$$f(x) = x + 1 \cos x \quad f'(x) = (\cos x)(1) - (x + 1)(-\sin x)(\cos x)^2 = \cos x + x \sin x + \sin x \cos^2 x$$

(4) $f(x) = e^x (\tan x - x)$

$$f(x) = e^x (\tan x - x) \quad f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x) = e^x \tan^2 x + e^x \tan x - x e^x$$

(5) $f(x) = \sin x + \cos x e^x$

$$f(x) = \sin x + \cos x e^x \quad f'(x) = (e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)(e^x)^2 = -2 \sin x e^x$$

(6) $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$$f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x \quad f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2)(-\sin x) + (\cos x)(2x) = x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$$

(7) $f(x) = x^3(x + 3)$

$$f(x) = x^3(x + 3) = x^5 + 3x^4 \quad f'(x) = 5x^4 - 16 + x - 23 = 5x^4 + 1x^23$$

(8) $f(x) = 1 + \sec x 1 - \sec x$

$$f(x)=1+\sec x \quad 1-\sec x \quad f'(x)=(1-\sec x)(\sec x \tan x)-(1+\sec x)(-\sec x \tan x) \\ (1-\sec x)^2=2\sec x \tan x(1-\sec x)^2$$

$$(9) f(x)=2-1x \quad x-3$$

$$f(x)=2-1x \quad x-3=2x-1x^2-3x \quad f'(x)=(x^2-3x)(2)-(2x-1)(2x-3)(x^2-3x) \\ 2=-2x^2+2x-3(x^2-3x)^2$$

$$(10) f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1)$$

$$f(x)=(x^3-x)(x^2+2)(x^2+x+1) \quad f'(x)=(x^3-x)((x^2+2)(2x+1)+(x^2+x+1)(2x)) \\ +(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)=(x^3-x)(x^2+2)(2x+1)+(x^3-x)(x^2+x+1)(2x) \\ +(x^2+2)(x^2+x+1)(3x^2-1)$$

$$(11) f(x)=(\csc x+\cot x)-1$$

$$f(x)=(\csc x+\cot x)-1=1 \csc x+\cot x \quad f'(x)=-1(-\csc x \cot x-\csc^2 x)(\csc x+\cot x)^2 \\ =\csc x \cot x+\csc^2 x(\csc x+\cot x)^2=\csc x(\cot x+\csc x)(\csc x+\cot x)^2 \\ =\csc x \cot x+\csc x$$

$f(x)$ إذا كان $g(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$ ، وكان:

$$f(0)=5, f'(0)=-3, g(0)=-1, g'(0)=2$$

$$(12) (fg)'(0)$$

$$(fg)'(0)=f(0)g'(0)+g(0)f'(0)=5 \times 2-1 \times -3=13$$

$$(13) (fg)'(0)$$

$$(fg)'(0)=g(0)f'(0)-f(0)g'(0)g^2(0)=-1 \times -3-5 \times 2(-1)^2=-7$$

$$(14) (7f-2fg)'(0)$$

$$(7f-2fg)'(0)=7f'(0)-2(fg)'(0)=7(-3)-2(13)=-47$$

x أجد المشتقة الثانية لكل اقتران مما يأتي عند قيمة المعطاة:

(15) $f(x)=x^2-4x^2+4$, $x=-2$

$$f(x)=x^2-4x^2+4 \quad f'(x)=(x^2+4)(2x)-(x^2-4)(2x)(x^2+4)^2=16x(x^2+4)^2$$

$$f''(x)=(x^2+4)^2(16)-(16x)(2)(x^2+4)^1(2x)(x^2+4)^4=(16)(x^2+4)-(16x)(2)$$

$$(2x)(x^2+4)^3 \quad f''(-2)=(16)(8)-(-32)(2)(-4)(8)^3=-14$$

(16) $f(x)=1+x^1+x^3$, $x=8$

$$f(x)=1+x^1+x^3=(1+x^3)(1-x^3+x^2^3)1+x^3=1-x^3+x^2^3 \quad f'(x)=-13x-23$$

$$+23x-13 \quad f''(x)=29x-53-29x-43=29x^5^3-29x^4^3 \quad f''(8)=298^5^3-298^4^3$$

$$3=29(132-116)=-1144$$

(17) $f(x)=11+x$, $x=4$

$$f(x)=11+x \quad f'(x)=-(12x)(1+x)^2=-12x(1+x)^2 \quad f''(x)=2x(2)(1+x)^1(12x)$$

$$+(1+x)^2(1x)^4x(1+x)^4=2+1+xx^4x(1+x)^3 \quad f''(4)=2+1+2^216(1+2)^3=7$$

$$864$$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

(18) $f(x)=1+x^1+ex$, $(0,12)$

$$f(x)=1+x^1+ex \quad f'(x)=(1+ex)(1)-(1+x)(ex)(1+ex)^2=1-xex(1+ex)^2$$

ميل المماس عند النقطة $(0, 12)$ هو: $f'(0) = 14$

معادلة المماس هي:

$$y-12=14(x-0) \rightarrow y=14x+12$$

(19) $f(x)=ex \cos x + \sin x$, $(0,1)$

$$f(x)=ex \cos x + \sin x \quad f'(x)=(ex)(-\sin x) + (\cos x)(ex) + \cos x$$

ميل المماس عند النقطة $(0, 1)$ هو:

$$f'(0)=(1)(0)+(1)(1)+1=2$$

معادلة المماس هي:

$$y-1=2(x-0) \rightarrow y=2x+1$$

أثبت صحة كلِّ ممَّا يأتي معتمداً أنَّ $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$$(20) \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}(\cos x \sin x) = (\sin x)(-\sin x) - (\cos x)(\cos x) \sin^2 x = -\sin^2 x - \cos^2 x \sin^2 x = -1 \sin^2 x = -\csc^2 x$$

$$(21) \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}(1/\cos x) = -(-\sin x)/\cos^2 x = 1/\cos x \times \sin x/\cos x = \sec x \tan x$$

$$(22) \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = \frac{d}{dx}(1/\sin x) = -(\cos x)/\sin^2 x = -1/\sin x \times \cos x/\sin x = -\csc x \cot x$$

ألاحظ المشتقة المعطاة في كلِّ ممَّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

$$(23) f'(x) = 2 - 2x, f''(x)$$

$$f''(x) = 2 - 2x, f'''(x) = 2$$

$$(24) f''(x) = 2x, f(4)(x)$$

$$f''(x) = 2x, f(4)(x) = 1$$

$$(25) f(4)(x) = 2x + 1, f(6)(x)$$

$$f(4)(x) = 2x + 1, f(5)(x) = 2, f(6)(x) = 0$$



(26) **نباتات هجينة:** وجد فريق بحث زراعي أنه يمكن التعبير عن ارتفاع نبتة هجينة من نبات تباع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = 3t^2 + 4t^2$ ، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور. أجد معدل تغير ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$$h(t) = 3t^2 + 4t^2 \quad h'(t) = (4 + t^2)(6t) - (3t^2)(2t) = 24t(4 + t^2) - 6t^3$$

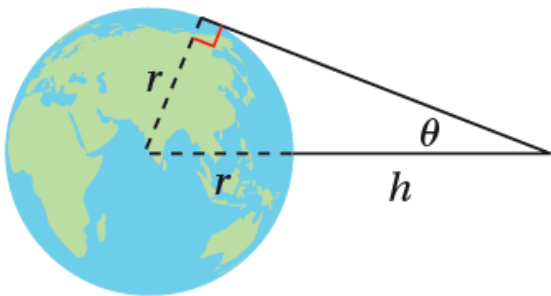
$y = e^x \sin x$ إذا كان الاقتران: ، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(27) أجد $\frac{dy}{dx}$ و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x) = e^x(\cos x + \sin x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \cos x$$

(28) أثبت أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y = 2e^x(\cos x + \sin x) - 2e^x \sin x = 2e^x \cos x = \frac{d^2y}{dx^2}$$



أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمار الصناعية الأرض، فإنه يُمكنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المبينة في الشكل المجاور. إذا كان h يمثل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومترات، و r يُمثل نصف قطر الأرض بالكيلومترات، فأجب عن السؤالين الآتيين تبعاً:

(29) أثبت أن $h = r(\csc \theta - 1)$.

$$\csc \theta = \frac{r+h}{r} \rightarrow r+h = r \csc \theta \rightarrow h = r(\csc \theta - 1)$$

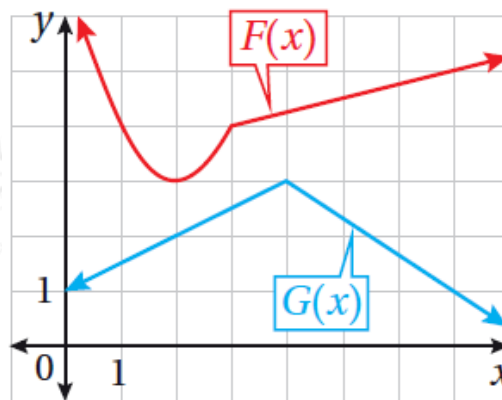
(30) أجد معدل تغير h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$ (أفترض أن $r = 6371 \text{ km}$).

$$\frac{dh}{d\theta} = r(-\csc \theta \cot \theta) \quad \frac{dh}{d\theta} \bigg|_{\theta = \frac{\pi}{6}} = 6371(-\csc \frac{\pi}{6} \cot \frac{\pi}{6}) = 6371(-2 \times 3) \approx -22070 \text{ km/rad}$$

(31) إذا كان: $x+12x^2f(x)=9\ln$ ، فأثبت أن $f'(x)=(3x-1)(3x+1)x^3$.

$$f(x)=9\ln x+12x^2f'(x)=9(1x)+-1(4x)4x^4=9x-1x^3=9x^2-1x^3=(3x-1)(3x+1)x^3$$

$F(x)$ يبين الشكل المجاور منحنىي الاقتراني: ، و $G(x)$.



$P(x) = F(x)G(x)$ إذا كان: ، وكان: $F(x)G(x)Q(x) =$ ، فأجد كلاً ممّا يأتي:

(32) $P'(2)$

$$P'(2)=F(2)G'(2)+G(2)F'(2)$$

G' ((ميل المستقيم الذي يمر بالنقطتين (2, 2) و (4, 3) ويساوي

F' ((ميل المماس الأفقي، ويساوي صفراً.

$$P'(2)=3 \times 12+2 \times 0=32$$

(33) $Q'(7)$

$$Q'(7)=G(7)F'(7)-F(7)G'(7)G^2(7)=1 \times 14-5 \times -231=4312$$