

أتحقق من فهمي الاشتقاق الضمني

العلاقة الضمنية ومشتقتها

أتحقق من فهمي صفحة 60

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

(a) $x^2 + y^2 = 13$

$$x^2 + y^2 = 13$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(b) $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2x + 5y^2 = \sin y$$

$$2 + 10y \frac{dy}{dx} = \cos y \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(10y - \cos y) = -2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

أتحقق من فهمي صفحة 62

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

(a) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$3xy^2 + y^3 = 8$$

$$6xy \frac{dy}{dx} + 3y^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{6xy + 3y^2}$$

$$(b) \tan(x - y) = 2xy^3 + 1$$

$$\tan(x - y) = 2xy^3 + 1$$

$$(1 - dydx) \sec^2(x - y) = 6xy^2 dydx + 2y^3$$

$$\sec^2(x - y) - \sec^2(x - y) dydx = 6xy^2 dydx + 2y^3$$

$$dydx(6xy^2 + \sec^2(x - y)) = \sec^2(x - y) - 2y^3$$

$$dydx = \sec^2(x - y) - 2y^3 / 6xy^2 + \sec^2(x - y)$$

$$(c) x^2 = x - yx + y$$

$$x^2 = x - yx + y$$

$$2x = (x + y)(1 - dydx) - (x - y)(1 + dydx)$$

$$2x(x + y)^2 = x - x dydx + y - y dydx - x - x dydx + y + y dydx$$

$$2x dydx = 2y - 2x(x + y)^2$$

$$dydx = 2y - 2x(x + y)^2 / 2x = y - x(x + y)^2 / x$$

أو يمكن تبسيط العلاقة قبل الاشتقاق كالآتي:

$$x^2 = x - yx + y \rightarrow x^3 + x^2y = x - y$$

$$\rightarrow 3x^2 + x^2 dydx + 2xy = 1 - dydx$$

$$\rightarrow dydx + x^2 dydx = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\rightarrow dydx(1 + x^2) = 1 - 3x^2 - 2xy$$

$$\rightarrow dydx = (1 - 3x^2 - 2xy) / (1 + x^2)$$

ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

أتحقق من فهمي صفحة 63

(a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة: $y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

$$y^2 = \ln x \rightarrow 2y \, dydx = 1x$$

$$\rightarrow dydx = \frac{1}{2y}x$$

$$dydx (e, 1) = \frac{1}{2}e$$

(b) أجد ميل العلاقة: $(y - 3)^2 = 4(x - 5)$ عندما $x = 6$.

لأجد قيمة $dydx$ عندما $x = 6$.

$$(y - 3)^2 = 4(6 - 5) \rightarrow (y - 3)^2 = 4$$

$$\rightarrow y - 3 = \pm 2$$

$$\rightarrow y = 5 \text{ or } y = 1$$

بالنسبة إلى x ينتج أن: $(y - 3)^2 = 4(x - 5)$ باشتقاق طرفي العلاقة

$$2(y - 3) \, dydx = 4$$

$$dydx = \frac{2}{y - 3}$$

ميل المماس عند النقطة الأولى هو:

$$dydx (6, 1) = \frac{2}{1 - 3} = -1$$

ميل المماس عند النقطة الثانية هو:

$$dydx (6, 5) = \frac{2}{5 - 3} = 1$$

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

أتحقق من فهمي صفحة 65

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة: $x^2 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

$$x^3 + y^3 - 3xy = 17 \rightarrow 3x^2 + 3y^2 dydx - 3x dydx - 3y = 0$$

$x = 2$ بتعويض ، و $y = 3$ ينتج أن:

$$3(2)^2 + 3(3)^2 dydx - 3(2) dydx - 3(3) = 0$$

$$dydx (2, 3) = -17$$

-17 ميل المماس هو:

إذن معادلة المماس هي:

$$y - 3 = -17(x - 2)$$

$$y = -17x + 237$$

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

أتحقق من فهمي صفحة 66

$xy + y^2 = 2x$ إذا كان: ، فأجد d^2y/dx^2 .

$$xy + y^2 = 2x \rightarrow x dydx + y + 2y dydx = 2$$

$$\rightarrow dydx = 2 - yx + 2y$$

$$\rightarrow d^2y/dx^2 = (x + 2y) (-dy dx) - (2 - y) (1 + 2dy dx)(x + 2y)^2$$

$$= (x + 2y) (y - 2x + 2y) - (2 - y) (1 + 2y)(x + 2y)^2$$

$$= (x + 2y) (y - 2) - (2 - y) (x + 4)(x + 2y)^3$$

$$= 2xy - 4x + 2y^2 - 8(x + 2y)^3$$

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطة

أتحقق من فهمي صفحة 67

أجد d^2y/dx^2 للمعادلة الوسيطة الآتية عندما $t = 2$:

$$x = 3t^2 + 1, y = t^3 - 2t^2$$

$$dy/dx = dy/dt \cdot dx/dt = 3t^2 - 4t \cdot 6t = 12t - 23$$

$$d^2y/dx^2 = d/dt(dy/dt) \cdot dx/dt = 12 - 4 = 8$$

$$d^2y/dx^2 \text{ at } t=2 = 8$$

الاشتقاق اللوغاريتمي

أتحقق من فهمي صفحة 69

أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي باستعمال الاشتقاق اللوغاريتمي:

(a) $y = x^x, x > 0$

$$y = x^x \rightarrow \ln y = \ln x^x$$

$$\rightarrow \ln y = x \ln x$$

$$\rightarrow 1/y (dy/dx) = x(1/x) + \ln x$$

$$\rightarrow dy/dx = y(x + \ln x) \rightarrow dy/dx = x^x(x + \ln x)$$

(b) $y = x - 1/x^4 + 1$

$$y = x - 1/x^4 + 1 \rightarrow \ln y = \ln(x - 1/x^4 + 1)$$

$$\rightarrow \ln y = \ln(x - 1/x^4 + 1)$$

$$\rightarrow \ln y = \ln(x - 1/x^4 + 1)$$

$$\rightarrow 1/y (dy/dx) = (1 - 4/x^5 + 1) \cdot (x - 1/x^4 + 1)$$

$$\rightarrow dy/dx = (2 - 4/x^5) \cdot (x - 1/x^4 + 1)$$