

إجابات تدريبات الدرس

التكامل بالتعويض

تدريب ١

جد قيمة التكامل الآتي: $\int (2x^3 + 4x^2)(x^2 + 2x + 3) dx$

الحل

$$\text{نفرض أن } u = x^2 + 2x + 3$$

$$\frac{du}{dx} = 2x + 2$$

$$dx = \frac{du}{2x + 2}$$

$$\int (2x^3 + 4x^2) \cdot \frac{du}{2x + 2}$$

$$\int \frac{(2x^3 + 4x^2) du}{2x + 2} = \int \frac{(2x^3 + 4x^2) du}{2(x + 1)}$$

$$= \int \frac{(2x^3 + 4x^2) du}{2(x + 1)}$$

تدريب ٢

حلّ الفرع (٤) من المثال (٢) باستخدام قيم ص بالتعويض في حدود التكامل.
جد قيمة التكامل الآتي:

$$(٤) \int_3^1 \frac{1}{\sqrt{1+s}} ds$$

الحل

$$ص = 1+s \Rightarrow 0 = \frac{ds}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{ص} = 1$$

$$\text{عندما } ص = 3 \Rightarrow 1+s = 3 \Rightarrow s = 2$$

$$\text{عندما } ص = 1 \Rightarrow 1+s = 1 \Rightarrow s = 0$$

$$\int_2^0 \frac{1}{\sqrt{ص}} \cdot \frac{1}{ص} ds = \int_2^0 \frac{1}{ص^{3/2}} ds$$

$$= \int_2^0 \frac{1}{ص^{3/2}} ds = \int_2^0 \frac{1}{ص^{1.5}} ds$$

$$= \left[-\frac{2}{\sqrt{ص}} \right]_2^0 = \left(-\frac{2}{\sqrt{0}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

تدريب ٣

جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

$$(1) \int 3x^2 (x^2 + 1)^{-5} dx \quad (2) \int 2x^2 \sqrt{x^2 - 1} dx$$

$$(3) \int (4 - x) \sqrt{x^2 - 2x - 1} dx \quad (4) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$$

الحل

$$(1) \int 3x^2 (x^2 + 1)^{-5} dx$$

$$= \int 3x^2 (x^2 + 1)^{-5} dx$$

$$= \int 3x^2 (x^2 + 1)^{-5} dx$$

$$= \int 3x^2 (x^2 + 1)^{-5} dx$$

$$= \int 3x^2 (x^2 + 1)^{-5} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x^2 + 1 \\ du &= 2x dx \\ x dx &= \frac{du}{2} \end{aligned}$$

$$(2) \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$$

$$= \int \frac{x^2}{(x^2-1)^2} dx$$

$$(3) \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x^2-1 \\ \frac{du}{dx} &= 2x \\ \frac{du}{2} &= x dx \end{aligned}$$

$$\int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx = \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{x}$$

تدريب ٤

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int (أس + ب)^\alpha دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0 ، ن \neq 1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس ، حيث أ، ب ثابتان، أ \neq 0$$

الحل

$$(1) \int (أس + ب)^\alpha دس = \frac{(أس + ب)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)أ} + \frac{(أس + ب)^\alpha}{أ} \quad \alpha \neq -1$$

$$(2) \int جتا(أس + ب) دس = \frac{سنا(أس + ب)}{أ} + \frac{جتا(أس + ب)}{أ} + \frac{سنا(أس + ب)}{أ}$$

تدريب ٥

جد قيمة كل تكامل مما يأتي:

$$(1) \int \frac{1}{(أس + ب)^\alpha} دس \quad (2) \int \frac{1}{(أس + ب)^\alpha} دس$$

الحل

$$(1) \int \frac{1}{(أس + ب)^\alpha} دس = \frac{(أس + ب)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)أ} + \frac{(أس + ب)^{1-\alpha}}{(1-\alpha)أ} \quad \alpha \neq 1$$

$$(2) \int \frac{1}{(أس + ب)^\alpha} دس = \frac{سنا(أس + ب)}{أ} + \frac{جتا(أس + ب)}{أ} + \frac{سنا(أس + ب)}{أ}$$