

إجابات أسئلة الدرس

التكامل بالتعويض

(١) اكتب التعويض المناسب لإيجاد قيمة كل تكامل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int (1-x^2)(x^2-x+1) dx$ (ب) $\int \sqrt{x^2-2} dx$ (ج) $\int (x^2-x+1) dx$ (د) $\int \frac{9-x^3}{(x^2-2)^2} dx$

الحل

(أ) $\int (1-x^2)(x^2-x+1) dx$

من $x = 1-x^2 \Rightarrow \frac{dx}{dx} = -2x \Rightarrow dx = \frac{dx}{-2x}$

$\int (1-x^2)(x^2-x+1) dx = \int \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)}{-2x} dx$

$= \int \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)}{-2x} dx = \int \frac{(1-x^2)(x^2-x+1)}{-2x} dx$

(ب) $\int \sqrt{x^2-2} dx$

من $x^2-2 = u \Rightarrow \frac{dx}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dx}{2x}$

$\int \sqrt{x^2-2} dx = \int \frac{\sqrt{u} du}{2x}$

$$\begin{aligned}
 p + \frac{u}{\frac{1}{2}} &= p + \frac{u}{1+\frac{1}{2}} \\
 p + \sqrt[3]{u} \cdot \frac{0}{\sqrt[3]{u}} &= \\
 p + \sqrt[3]{(2-3u)} \cdot \frac{0}{\sqrt[3]{u}} &= \\
 (p) [(2-3u) \cdot \frac{0}{\sqrt[3]{u}}] &= \\
 u = 2 - 3u &\Rightarrow \frac{4u}{\sqrt[3]{u}} \\
 \cdot \sqrt[3]{u} &= \frac{4u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} \\
 \frac{4u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} (1-3u) &= \\
 [- \frac{4u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}}] &= - \frac{4u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} \\
 = - \frac{4u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (p) \frac{9-4u}{(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u})} &= \\
 u = 2 - 4u &\Rightarrow \frac{6u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} \\
 \cdot \sqrt[3]{u} &= \frac{6u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} \\
 = \frac{6u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} \times \frac{9-4u}{\sqrt[3]{u}} &= \\
 = \frac{6u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}} \times \frac{9-4u}{\sqrt[3]{u}} &= \\
 p + \frac{1-u}{1-\frac{1}{2}} &= p + \frac{1+2-u}{1+2-\frac{1}{2}} \\
 p + \frac{3-u}{(\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u})^2} &= p + \frac{3-u}{\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{u}}
 \end{aligned}$$

(٢) جد قيمة كل من التكاملات الآتية:

(أ) $\int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds$ (ب) $\int (s-1)(s^2-2s-4)(s+1) ds$
(ج) $\int 2 \sqrt{s(s-2)} ds$ (د) $\int s^2 \sqrt{s+1} ds$

الحل

(أ) $\int \sqrt[3]{(2-s)(3-s)} ds = \int \sqrt[3]{(s-2)(s-3)} ds$
 $\int \frac{1+\frac{4}{3}}{3 \times (1+\frac{4}{3})} ds = \frac{1+\frac{4}{3}}{3 \times (1+\frac{4}{3})} ds$

$\int \frac{1}{3 \times \frac{10}{3}} ds = \int \frac{1}{10} ds$

(ب) $\int (s-1)(s^2-2s-4)(s+1) ds$
 $ص = s^2 - 2s - 4 \Rightarrow \frac{ص}{ص} = 1 - 2s - \frac{4}{ص}$
 $ص = \frac{ص}{(1-s)^2} \Rightarrow ص = \frac{ص}{(1-s)^2}$

$\int \frac{ص}{(1-s)^2} ds = \int \frac{ص}{(1-s)^2} ds$
 $\int \frac{ص}{(1-s)^2} ds = \int \frac{ص}{(1-s)^2} ds$

(ج) $\int 2 \sqrt{s(s-2)} ds$
 $\int 2 \sqrt{s(s-2)} ds$

(د) $\int s^2 \sqrt{s+1} ds$
 $ص = s^2 + 1 \Rightarrow \frac{ص}{ص} = 1 + \frac{1}{ص}$

$\int \frac{ص}{ص} ds = \int \frac{ص}{ص} ds$

$\int \frac{1}{ص} ds = \int \frac{1}{ص} ds$

٣) احسب قيمة كل من التكاملات الآتية:

أ) $\int_1^2 \sqrt{4s+1} \, ds$

ب) $\int_1^2 3s^2(s^3-1) \, ds$

ج) $\int_1^2 s^2 \sqrt{s^3-1} \, ds$

د) $\int_1^2 \frac{s^2-3}{s^2(s^3-1)} \, ds$

الحل

٢) $\int_1^2 \sqrt{4s+1} \, ds = \int_1^2 (1+4s)^{\frac{1}{2}} \, ds$

$$= \left[\frac{(1+4s)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^2 = \left[\frac{(1+4s)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2}{3} (1+4s)^{\frac{3}{2}} \right]_1^2$$

$$= \left[\frac{2}{3} (1+4 \times 2)^{\frac{3}{2}} \right] - \left[\frac{2}{3} (1+4 \times 1)^{\frac{3}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{3} (17\sqrt{17} - 9\sqrt{5})$$

$$\frac{1}{x} (1 - x^2) = \frac{1}{x} \times 2x = 2$$

$$(ب) \int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2) dx = \text{مطلوب}$$

$$(ج) \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx =$$

$$\int_{-1}^1 x^2 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$\text{هنا } 1 - x^2 = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow x^2 = \frac{dx}{dx} \Leftrightarrow 1 - x^2 = \frac{dx}{dx}$$

$$\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{dx}{dx} \int_{-1}^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1 + \frac{1}{x}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\frac{x+1}{x}} dx$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} \ln(1-x^2) \right)$$

$$\frac{3}{2} (16^3 - 8^3)$$

$$\frac{3}{2} (1 - 0)$$

$$\frac{3}{2} = 1 \times \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 8)^2} dx = \int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 8)^2} dx$$

$$u = x^3 - 8 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$$

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{(x^3 - 8)^2} dx = \int_1^2 \frac{\frac{du}{3} - 2}{u^2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{du - 6}{u^2}$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{1}{u} - \frac{6}{u} \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{u} - \frac{6}{u} \right]_1^2$$

$$\frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - \frac{6}{2} - \left(\frac{1}{1} - \frac{6}{1} \right) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - 3 - 1 + 6 \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - 3 - 1 + 6 \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} - 3 - 1 + 6 \right]$$

٤) إذا علمت أن ق(٨) = ٥، ق(٢٧) = ٦، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_2^3 \frac{1}{(x^3 - 8)^2} dx$ **الحل**

$$u = x^3 - 8 \Rightarrow du = 3x^2 dx \Rightarrow x^2 dx = \frac{du}{3}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{(x^3 - 8)^2} dx = \int_2^3 \frac{\frac{du}{3}}{u^2} = \frac{1}{3} \int_2^3 \frac{du}{u^2}$$

$$\frac{1}{3} \left[-\frac{1}{u} \right]_2^3 = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{u} \right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{27} - \left(-\frac{1}{8} \right) \right] = \frac{1}{3} \left[-\frac{1}{27} + \frac{1}{8} \right]$$

(٥) إذا علمت أن $\int_0^2 (س) دس = ٣$ ، فجد قيمة التكامل الآتي: $\int_{-1}^2 ٨ س ق (س + ١) دس$

الحل

$$ص = س + ١ \Rightarrow دس = د(س + ١) \Rightarrow دس = دس + ١ \Rightarrow دس = دس - ١$$

$$\int_{-1}^2 ٨ س ق (س + ١) دس = \int_{-1}^2 ٨ س ق (س + ١) (دس - ١) دس$$

$$\text{عند } س = -١ \Rightarrow ص = ٠ \Rightarrow دس = ١$$

$$\text{عند } س = ٢ \Rightarrow ص = ٣ \Rightarrow دس = ٣$$

$$\int_{-1}^2 ٨ س ق (س + ١) دس = \int_0^3 ٨ (ص - ١) دص = ٨ \left[\frac{ص^2}{2} - ص \right]_0^3 = ٨ \left(\frac{9}{2} - 3 \right) = ٨ \left(\frac{3}{2} \right) = ١٢$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

(٦) حل المسألة الواردة في بداية الدرس.

جد قيمة التكامل الآتي:

$$\int_0^2 س \sqrt{٩ + س^2} دس$$

الحل

$$\int_0^2 س \sqrt{٩ + س^2} دس = \int_0^2 س (٩ + س^2)^{\frac{1}{2}} دس$$

$$ص = ٩ + س^2 \Rightarrow دص = ٢س دس \Rightarrow دس = \frac{دص}{٢}$$

$$\int_0^2 س \sqrt{٩ + س^2} دس = \int_0^2 \frac{ص}{٢} \sqrt{ص} \cdot \frac{دص}{٢}$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^2 ص \sqrt{ص} دص = \frac{1}{4} \int_0^2 ص^{\frac{3}{2}} دص = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{5} ص^{\frac{5}{2}} \right]_0^2 = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{5} (٩ + ٤)^{\frac{5}{2}} - 0 \right] = \frac{1}{4} \left[\frac{2}{5} (١٣)^{\frac{5}{2}} \right] = \frac{1}{10} (١٣)^{\frac{5}{2}}$$

منهاجي
متعة التعليم الهادف

منهاجي
متعة التعليم الهادف

$$= \frac{1}{10} (١٣)^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{10} (١٣)^2 \sqrt{١٣} = \frac{169}{10} \sqrt{١٣}$$