إجابات تمارين ومسائل الدرس

التزايد والتناقص

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ) ق(س) = ٤س − س^{٢} ، س ∈ ح.

ب) ق(س) = |س^{٢} − ٩| ، س ∈ [−٥ ، ٥]

جـ) ق(س) = جتا^{٢}س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

د) ق(س) = (١ − س)^{٣} ، س ∈ ح.

هـ) ق(س) = (٢ − س)^{٤} ، س ∈ ح.

و) ق(س) = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٥ ، ٥]

ز) ق(س) = $\sqrt[٣]{(س-٤)^{٢}}$ ، س ∈ ح.

ح) ق(س) = جتا س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

ط) ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س^{٢} & ، س \geq ١ \\ \frac{٢}{س} & ، س < ١ \end{cases}$

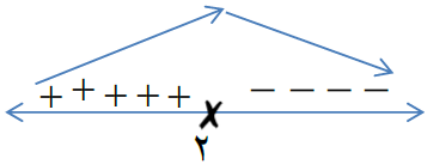
ي) ق(س) = { ٤ − س^{٣} ، س > ١ ؛ $\frac{٣}{س}$ ، س ≤ ١ }

الحل

أ) هـ(س) = ٤س − س^{٢} ، س ∈ ع

هـَ(س) = ٤ − ٢س

هـَ(س) = ٠ ← ٤ − ٢س = ٠ ← س = ٢



فترات التزايد (−∞، ٢]

فترات التناقص [٢، ∞)

ب) هـ(س) = |س^{٢} − ٩| ، س ∈ [−٥، ٥]

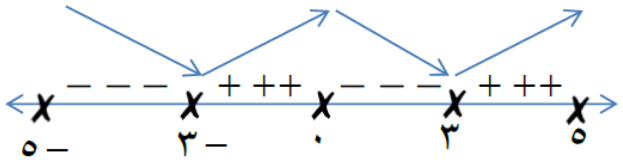
س^{٢} − ٩ = ٠ ← س = ±٣

هـ(س) = { س^{٢} − ٩ ، −٥ ≤ س < −٣ ؛ ٩ − س^{٢} ، −٣ ≤ س < ٣ ؛ س^{٢} − ٩ ، ٣ < س ≤ ٥ }

هـَ(س) = { ٢س ، −٥ < س < −٣ ؛ −٢س ، −٣ < س < ٣ ؛ ٢س ، ٣ < س < ٥ }

هـَ(س) = ٠ ← س = ٠

هـَ(س) غير موجودة عند س = ±٣



فترات التزايد : [−٣، ٠] ∪ [٣، ٥]

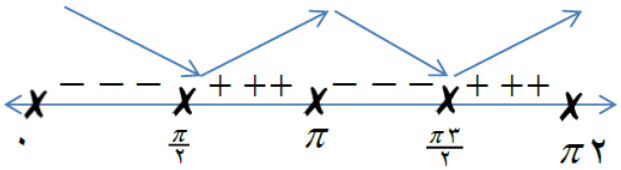
فترات التناقص : [−٥، −٣] ∪ [٠، ٣]

جـ) هـ(س) = جتا^{٢} س ، س ∈ [٠، ٢π]

هـَ(س) = −٢ جتاس جاس

هـَ(س) = ٠ ← −٢ جتاس جاس = ٠

س = $\frac{π}{٢}$ ، π ، $\frac{٣π}{٢}$ و غير موجودة عند س = ٠ ، ٢π



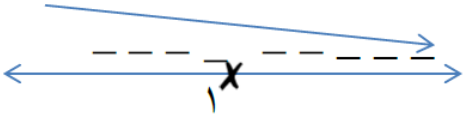
فترات التزايد : $\left[\frac{\pi}{2}، \pi\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}، 2\pi\right]$

فترات التناقص : $\left[0، \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi، \frac{3\pi}{2}\right]$

د) $هـ(س) = (١ - س)^{٣}$ ، $س \in ع$

$هـ'(س) = -٣(١ - س)^{٢}$

$هـ'(س) = ٠ \leftarrow س = ١$

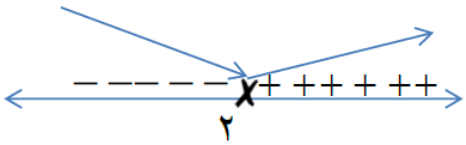


$هـ(س)$ متزايد لكل $س \in ع$

هـ) $هـ(س) = (٢ - س)^{٤}$ ، $س \in ع$

$هـ'(س) = -٤(٢ - س)^{٣}$

$هـ'(س) = ٠ \leftarrow س = ٢$

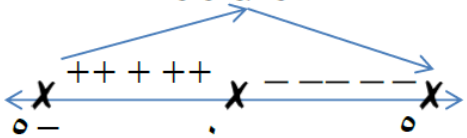


متزايد على الفترة $[٢، \infty)$ ، متناقص على الفترة $(-\infty، ٢]$

و) $هـ(س) = \sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، $س \in [-٥، ٥]$

$$هـ'(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٢٥ - س^{٢}}}$$

$هـ'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$ و غير موجودة عند $س = \pm ٥$

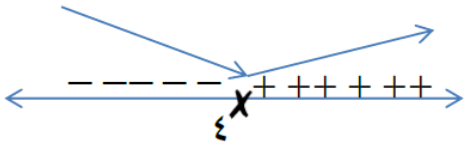


متزايد على الفترة $[-٥، ٠]$ متناقص على الفترة $[٠، ٥]$

ز) $هـ(س) = (س - ٤)^{\frac{٢}{٣}}$ ، $س \in ع$

$$هـ'(س) = \frac{٢}{٣(س - ٤)^{\frac{١}{٣}}}$$

$هـ'(س) \not= ٠$ ولاكن $هـ'(س)$ غير موجودة عند $س = ٤$



متزايد على الفترة $(-\infty، ٤]$ ، متناقص على الفترة $[٤، \infty)$

ج) $هـ(س) = جتاس - \frac{١}{٢}جتا٢س$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

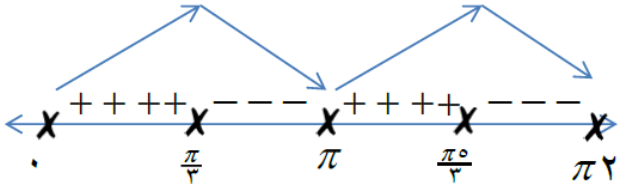
$هـ'(س) = -جاس + جا٢س$

$هـ'(س) = ٠ \leftarrow -جاس + جا٢س = ٠$

$٢جاس جتاس - جاس = ٠ \leftarrow جاس(٢جتاس - ١) = ٠$

$جاس = ٠ \leftarrow س = ٠ ، \pi$

$٢جتاس - ١ = ٠ \leftarrow جتاس = \frac{١}{٢} \leftarrow س = \frac{\pi}{٣} ، \frac{\pi ٥}{٣}$



متزايد على الفترة $[٠، \frac{\pi}{٣}] \cup [\frac{\pi ٥}{٣}، \pi]$

متناقص على الفترة $[\frac{\pi}{٣}، \pi] \cup [\pi ٢، \frac{\pi ٥}{٣}]$

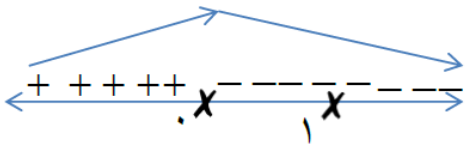
ط)

$$هـ(س) = \begin{cases} ٣ - س^{٢} & ، \ س \geq ١ \\ \frac{٢}{س} & ، \ س < ١ \end{cases}$$

$$هـ'(س) = \begin{cases} -٢س & ، \ س > ١ \\ -\frac{٢}{س^{٢}} & ، \ س < ١ \end{cases}$$

$هـ(س)$ متصل عند $س = ١$ و قابل للأشتقاق

$هـ'(س) = ٠ \leftarrow س = ٠$



متزايد على الفترة : $(-\infty، ٠]$

متناقص على الفترة : $[١، \infty)$

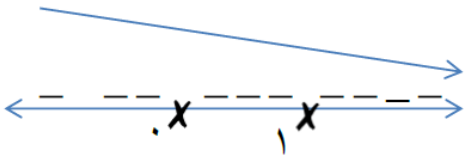
ي)

$$\text{ق}(س) = \begin{cases} ٤ - س^{٣} & ، \ س \geq ١ \\ \frac{٣}{س} & ، \ س < ١ \end{cases}$$

$$\text{ق}'(س) = \begin{cases} -٣س^{٢} & ، \ س > ١ \\ -\frac{٣}{س^{٢}} & ، \ س < ١ \end{cases}$$

ق(س) متصل عند س = ١ و قابل للأشتقاق

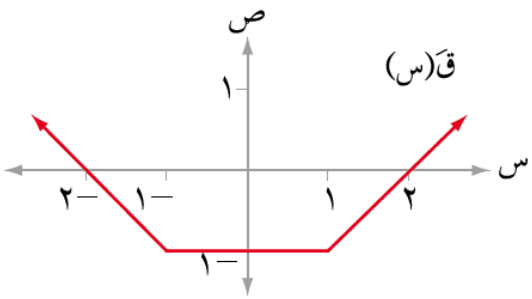
ق'(س) = ٠ ← س = ٠



الأقتران متناقص لكل س∈ع

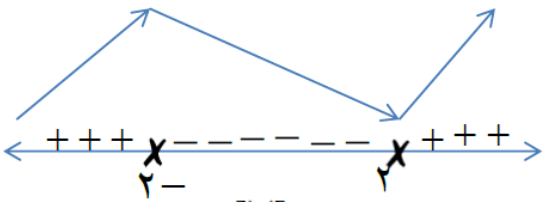
---

٢) يمثل الشكل (٣-١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق، حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.



الشكل (٣-١٢)

الحل



متزايد على الفترة: $(-\infty، -٢] \cup [٢، \infty)$

متناقص على الفترة : $[-٢، ٢]$

---

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∈ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + س٣، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

منهاجي
متعة التعليم الهادف

الحل

$هَ(س) = قَ(س) + ٣س^{٢}$

ولا كن $قَ(س) > ٠$ على الفترة $(أ، ب)$

و $٣س^{٢} > ٠$ على الفترة $(أ، ب)$

فيكون ← $هَ(س) > ٠$ على الفترة

$\therefore$ هـ (س) متزايد على الفترة $[أ، ب]$

منهاجي
متعة التعليم الهادف