إجابات تدريبات الدرس

المشتقة الأولى

تدريب ١

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) إذا كان ق(س) = س^{٣} + ٢س ، فجد قَ (−١).

٢) إذا كان قَ(٠) = ٦ ، فجد $\text{نهـــا}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{٣هـ}$

الحل

١) قَ (− ١) = $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{ق(س) - ق(-١)}{س - -١}$

= $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٣} + ٢س - ((-١)^{٣} + ٢ \times -١)}{س + ١}$

= $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٣} + ٢س - (-١ - ٢)}{س + ١}$

= $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{س^{٣} + ١}{س + ١} + \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{٢س + ٢}{س + ١}$

= $\text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{(س + ١)(س^{٢} - س + ١)}{س + ١} + \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{٢(س + ١)}{س + ١}$

= (١ + ١ + ١) + ٢ = ٥

٢) بفرض أنَّ م = ٥هـ ⇐ هـ = $\frac{م}{٥}$

عندما هـ ← ٠ ، فإنَّ م ← ٠

$\text{نهـــا}_{م \leftarrow ٠} \frac{ق(٠) - ق(م)}{\frac{م}{٥} \times ٣} = \frac{٥}{٣} \times -\text{نهـــا}_{م \leftarrow ٠} \frac{ق(م) - ق(٠)}{م}$

= $\frac{٥}{٣} \times$ قَ(٠) = $\frac{٥}{٣} \times -٦ = -١٠$

تدريب ٢

إذا كان ص = ق(س) = $\frac{س}{س+١}$، فجد $\frac{ودص}{ودس}$ عند س = ٢

الحل

$$ق'(٢) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ق(٢)}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{\frac{س}{س+١} - \frac{٢}{٣}}{س - ٢}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٣س - ٢(س+١)}{٣(س+١)} \times \frac{١}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{٣س - ٢س - ٢}{٣(س+١)}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{س - ٢}{٣(س+١)} \times \frac{١}{س - ٢} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow ٢} \frac{١}{٣(س+١)}$$

$$= \frac{١}{٣(٢+١)} = \frac{١}{٣ \times ٣} = \frac{١}{٩}$$

تدريب ٣

إذا كان كان ق(س) = $\begin{cases} ٤س + ١ & ، \quad -٣ \leq س < ١ \\ ٢س + ٣ & ، \quad ١ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

جد ق'(−١) ، ق'(١) إن وجدت.

الحل

$$ق'(-١) = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{ق(س) - ق(-١)}{س + ١}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{٤س + ١ - (٤ \times -١ + ١)}{س + ١}$$

$$= \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{٤س + ١ + ٣}{س + ١} = \text{نهـــا}_{س \leftarrow -١} \frac{٤س + ٤}{س + ١}$$

$$= \frac{٤(س+١)}{س+١} = ٤$$

عند س = ١ نجد النهاية من اليمين ومن اليسار

$$د'(١)^{+} = \lim_{س \to ١^{+}} \frac{د(س) - د(١)}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^{+}} \frac{س^{٢} - ٣س + ٥}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{+}} \frac{٢س - ٣}{١} = ٢ - ٣ = -١$$

$$د'(١)^{-} = \lim_{س \to ١^{-}} \frac{٤س + ١ - ٥}{س - ١}$$

$$= \lim_{س \to ١^{-}} \frac{٤س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{-}} \frac{٤(س - ١)}{س - ١} = ٤$$

د'(١) غير موجودة لأن

$د'(١)^{+} \neq د'(١)^{-}$

تدريب ٤

إذا كان $ق(س) = \frac{س}{س^{٢} + ٨}$ فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

الحل

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{ع}{ع^{٢} + ٨} - \frac{س}{س^{٢} + ٨}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع(س^{٢} + ٨) - س(ع^{٢} + ٨)}{(ع^{٢} + ٨)(س^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع س^{٢} + ٨ع - ع^{٢} س - ٨س}{(ع^{٢} + ٨)(س^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{(ع - س)}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع س^{٢} - ع^{٢} س + ٨ع - ٨س}{(ع^{٢} + ٨)(س^{٢} + ٨)} \times \frac{١}{ع - س}$$

$$= \text{نها}_{س \to ع} \frac{ع س (س - ع)}{ع - س} + ٨ \frac{(ع - س)}{ع - س} \times \frac{١}{(س + ٨)(س + ع٢)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ع} (-ع س) + ٨) \times \frac{١}{(س + ع٢)^{٢}}$$

$$= (-ع٢ + ٨) \times \frac{١}{(ع٢ + ٨)^{٢}}$$

$$= \frac{-ع٢ + ٨}{(ع٢ + ٨)^{٢}}$$

تدريب ٥

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

الحل

المساحة $م(س) = س^{٢}$

المطلوب $م'(٢٠)$.

$$م'(٢٠) = \text{نها}_{س \to ٢٠} \frac{م(س) - م(٢٠)}{س - ٢٠} = \text{نها}_{س \to ٢٠} \frac{س^{٢} - (٢٠)^{٢}}{س - ٢٠}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٢٠} \frac{(س - ٢٠)(س + ٢٠)}{س - ٢٠} = \text{نها}_{س \to ٢٠} (س + ٢٠)$$

$$= ٢٠ + ٢٠ = ٤٠$$